212-38
76 kop.
311
JAL
319

ELEMENTAARSTATISTIKA KÄSIRAAMAT

HJALASTO

ELEMENTAAR-STATISTIKA KÄSIRAAMAT

Σ

VIIMSI RAAMATUKOGU
1511 001882

HANS JALASTO

ELEMENTAAR-STATISTIKA KÄSIRAAMAT

«VALGUS» · TALLINN 1978

31
J 19

Kaane kujundanud R. Eilsen

Käsiraamat sisaldab valemeid ja ülesannete lahendamise näiteid, mis on vajalikud majandusspetsialistidele mitmesuguste praktiliste ülesannete lahendamisel. Käsitletakse suhtarvusid, keskmisi, variatsiooninäitarve, momentide kasutamist statistilistes arvutustes, väljavõttelist vaatlust, aegridu, korrelatsioon- ja regressioonanalüüsi statistilisi hüpoteese ja indekseid.

Käsiraamat on mõeldud eelkõige statistikat õppinud majandusspetsialistidele ning võib olla kasulik kõigi majandusettevõtete praktikas ja ka statistikat õppivatele üliõpilastele.

3242
S. M. Kirovi nim.
KUSTUTATUD
RAAMATUKOGU
11. 06. 2026
Viimsi Raamatukogu

J 10805—26
M902(16)—78 62—77 © Kirjastus «Valgus», 1978

SISUKORD

Sisukord 3
Eessõna 7
I STATISTIKA PÕHIMÕISTEID JA TÄHISTUSI . 9
1.1. Statistika 9
1.2. Nähtus 10
1.3. Vaatlus ja katse 11
1.4. Tunnus 12
1.5. Suurus ja arv 13
1.6. Karakteristik 14
1.7. Read 14
1.8. Rea elementide tähistamine 15
1.9. Rühmitamine 17
1.10. Summa 18
1.11. Korrutis 19
1.12. Tabelid 20
1.13. Arvjoonised 21
II SUHTARVUD 25
2.1. Struktuurisuhtarvud 25
2.2. Koordinatsioonisuhtarvud 27
2.3. Dünaamikasuhtarvud 28
2.4. Hälbimissuhtarvud 33
2.5. Võrdlussuhtarvud 35
2.6. Intensiivsussuhtarvud 35
III KESKMISED 38
3.1. Aritmeetiline keskmine 39
3.1.1. Aritmeetilise keskmise arvutamist lihtsustavad omadused 40
3.1.2. Aritmeetilise keskmise arvutamine struktuurisuhtarvude alusel 44
3.1.3. Intervallitud variatsioonrea aritmeetiline keskmine 46

3.1.4. Aritmeetilise keskmise arvutamine momentide meetodil 47
3.2. Harmooniline keskmine 48
3.3. Aritmeetiline või harmooniline keskmine . . 49
3.4. Astmekeskmised 50
3.5. Kronoloogiline keskmine 51
3.6. Geomeetriline keskmine 52
3.7. Mood 54
3.8. Mediaan 57
3.9. Kvartiilid 60
3.10. Detsiilid 62
3.11. Tsentiilid 62
IV VARIATSIOONINÄITARVUD 63
4.1. Variatsiooniulatus 63
4.2. Keskmine lineaarhälve 64
4.3. Dispersioon 65
4.3.1. Diseprsiooni arvutamist lihtsustavad omadused 65
4.3.2. Alternatiivse tunnuse dispersioon . . . 68
4.3.3. Dispersioonide liitmise lause 69
4.4. Standardhälve 70
4.5. Variatsioonikoefitsiendid 72
4.6. Variatsiooninäitarvude arvutamine 72
4.7. Jaotuskõvera kuju hindamine 76
4.8. Teoreetilise variatsioonkõvera konstrueerimine 78
V MOMENDID 81
5.1. Momentide mõiste 81
5.2. Momentide kasutamine statistilistes arvutustes 81
5.3. Intervallitud variatsioonrea tingmomentide leidmine liitmismenetlusega 86
5.4. Variatsioonrea kuju hindamine momentide abil 88
VI VÄLJAVÕTTELINE VAATLUS 92
6.1. Väljavõttelise vaatluse mõiste 92
6.2. Väljavõttelise vaatluse liigid 93
6.3. Väljavõttelise vaatluse vead 94
6.4. Juhuväljavõtt 96
6.5. Mehaaniline väljavõtt 100
6.6. Tüüpväljavõtt 102
6.7. Seeriaväljavõtt 106
6.8. Kombineeritud väljavõtt 110
6.9. Väikeväljavõtt 111
VII KORRELATSIOON JA REGRESSIOON . . . 117
7.1. Korrelatsiooni ja regressiooni mõiste . . . 117
7.2. Korrelatiivse seose rangus ja suund . . . 119
7.3. Korrelatiivse seose kuju 120

7.4. Korrelatiivsete seoste liigid 121
7.5. Korrelatsioonidiagramm 122
7.6. Korrelatsioonikordajad 125
7.6.1. Järjestusnumbrite korrelatsioonikordaja . 125
7.6.2. Paariskorrelatsioonikordaja 126
7.6.3. Korrelatsioonikordaja leidmine korrelatsioonitabeli andmetel 132
7.6.4. Kvalitatiivsete tunnuste korrelatsioonikordajad 136
7.7. Regressioonisirge võrrand 138
7.8. Korrelatsiooniindeks 143
7.9. Elastsuskordaja 145
7.10. Determinatsioonikordaja 146
VIII AEGREAD 148
8.1. Aegrea mõiste ja aegridade liigitus . . . 148
8.1.1. Momentread 149
8.1.2. Perioodread 150
8.2. Aegrea elementaarkarakteristikud 151
8.2.1. Absoluutne juurdekasv 152
8.2.2. Kasvutempo 154
8.2.3. Juurdekasvutempo 156
8.2.4. Keskmine kasvutempo 160
8.2.5. Aegrea elementide keskmised 162
8.3. Üldise arengutendentsi iseloomustamine . . 164
8.3.1. Aegread arvjoonistena 165
8.3.2. Aegridade tasandamine 166
8.4. Üldise arengutendentsi üldistamine 178
8.4.1. Interpoleerimine 178
8.4.2. Ekstrapoleerimine 180
8.5. Võngete uurimine nähtuste ajalises muutumises 181
8.5.1. Juhuslike võngete uurimine 181
8.5.2. Hooajaliste võngete uurimine 183
8.6. Mitme nähtuse samaajalise muutumise uurimine 185
8.6.1. Ridade viimine ühele alusele 185
8.6.2. Ridadevahelise korrelatiivse seose uurimine 188
IX INDEKSID 192
9.1. Indeksiteooria 192
9.2. Indeksite liigitus 193
9.3. Individuaalindeksid 194
9.4. Üldindeksid 194
9.5. Teguriindeksid 197
9.6. Keskmised indeksid 200
9.7. Struktuurinihete indeksid 202
X STATISTILISED HÜPOTEESID 207
10.1. Statistilise hüpoteesi mõiste 207

10.2. χ^2-kriteerium 208
10.3. z-kriteerium 214
10.4. F-kriteerium 218
10.5. t-kriteerium 219
XI STATISTILISED PROGNOOSID 225
11.1. Statistilise prognoosi mõiste 225
11.2. Eksponentfunktsioon 227
11.3. Lineaarfunktsioon 229
11.4. Logistiline funktsioon 235
11.5. Gompertzi funktsioon 239
11.6. Prognoosi kindlaksmääramine 243
Lisad 245
Aineregister 287
Kasutatud kirjanduse loetelu 295

EESSÕNA

Kõigis tootmisettevõtetes tuleb perioodiliselt arvutada plaani täitmise protsente, leida töötajate keskmisi palku ja tööviljakusi, arvutada toodangu omahinda ja uurida, kuidas selle osised on muutunud. Tihtilugu tuleb teha mitmesuguseid arvutusi eri nähtuste arengutempo kohta. Mitmete juhtimisotsuste tegemiseks on tarvis välja arvutada, kui palju kasvas toodang tööviljakuse, kui palju tööliste arvu muutumise tagajärjel või kuidas on töötajate palgafondi mõjustanud töötajate arvu, kvalifikatsiooni ja keskmise palga muutmine. Sageli on tarvis teada, missugused nähtused on omavahel tihedamini, missugused nõrgemini seotud. Nende ja paljude muude analoogiliste küsimuste lahendamine eeldab andmete hankimist vastavate nähtuste kohta ning nende asjatundlikku töötlemist. Käsiraamatus on esitatud kokkusurutult, ühtaegu aga kergesti arusaadaval kujul minimaalne hulk statistilisi tööviise ja meetodeid, mida vajatakse seda laadi ülesannete lahendamisel. Esitusviisi lihtsus tagab kirjeldatud meetodite hõlpsa mõistmise ka spetsiaalse ettevalmistuseta asjahuvilistele.

Võrreldes analoogilistel teemadel varem avaldatutega pälvib käsiraamat hindamist eelkõige kui just majandusettevõtete praktilistele töötajatele ardesseeritud teos. See seletab mõndagi

tema ülesehituses, sisus ja näidete valikus. Autor pole taotlenudki anda põhjalikku ülevaadet kogu kaasaegse statistika erakordselt laialdasest ning kiiresti täienevast meetodivaramust. On piirdutud suhteliselt vähenõudliku ülesandega — peamiste tööviiside kirjeldamisega, milleta majandusettevõtete praktilises töös enam toime ei tule. Selline piiramine on käsiraamatule, tema tagasihoidlikku mahtu arvestades, igati kasuks tulnud. Põhjalikuma käsiraamatu koostamine, mis suudaks rahuldada laiema tarbijaskonna, sealhulgas ka eksperimentaalteaduste esindajate tarbed, ootab alles teostamist.

Käsiraamatus on suhteliselt palju tähelepanu pööratud arvutuste lihtsustamise võtetele, millel on suur tähtsus, kui ülesandeid lahendatakse mitte eriti täiuslike lauaarvutitega nagu see praktikas siiani veel üsna üldine.

Uute juhtimismeetodite juurdumine majandusettevõtete tööpraktikasse, majandussotsioloogiliste uuringute sagenemine, huvi tõus otsustuste eksaktse põhjendamise ning nende tõesuse hindamise vastu annavad põhjust oletada, et statistiliste meetodite osatähtsus kasvab majandusettevõtete töös edaspidigi, millega suureneb ka vajadus vastava teatmekirjanduse järele. Elementaarstatistika käsiraamat, mille järele ettevõtete ökonoomikaosakondades on ammu vajadust tuntud, täidab temale seatud ülesandeid kõigi eelduste kohaselt hästi.

U. Mereste

I STATISTIKA PÕHIMÕISTEID JA TÄHISTUSI

1.1. STATISTIKA

Statistika on eelkõige teadus, mis käsitleb massnähtuste uurimist. Statistika kui iseseisva teaduste süsteemi tuumteaduse moodustab statistika üldteooria.

Majandusteaduse ja statistika sünteesintegratsioon on majandusstatistika. [1, 2]

Rahvamajandusharu ökonoomika ja statistika integratsioon annab rahvamajandusharu statistika (tööstusstatistika, ehitusstatistika). Rahvamajandusharu statistikat võib käsitada ka majandusstatistika allharuna, on ju rahvamajandusharu ökonoomika samuti ühtse majandusteaduse allharu.

Statistika ja matemaatika sünteesintegratsioon annab matemaatilise statistika. Viimane on paljude statistiliste arvutusmeetodite aluseks. Statistika üldteoorias on matemaatilise statistika alusel välja töötatud palju suurepäraseid meetodeid massnähtuste uurimiseks. Neid meetodeid täiustatakse järjekindlalt. Statistiliste meetodite süvendatud rakendamist on soodustanud raalide kasutamine arvutamisel.

Statistiliste meetodite suur tähtsus ühiskondlike massnähtuste uurimisel on tinginud statistika käsitlemise ühiskonnateadusena. Statistikal on aga olulisi kokkupuuteid ka loodusteadustega. Statistikaks nimetatakse majandusteaduses ka

ühte arvestusviisi, nimelt arvandmete kogumist ja töötlemist ettevõttest laiemas ulatuses. Ettevõttes rakendatavaid arvestusviise nimetatakse tavaliselt raamatupidamiseks ja operatiivseks arvestuseks. Viimane kogub andmeid peamiselt nende nähtuste või tunnuste kohta, mida raamatupidamine ei arvesta. Ettevõtte raamatupidamise ja operatiivse arvestuse andmeid saab kasutada ka ettevõtte tegevuse statistiliseks analüüsimiseks. Raamatupidamine ei ole küll korraldatud ainult statistilise vaatlusena, kuid ta on korraldatud nii, et andmeid saab kasutada statistiliste üldistuste tegemiseks ettevõtte tegevuse kohta ning pärast andmete kokkuvõtmist ka suuremate kogumite kohta, lõpptulemusena kogu rahvamajanduse kohta.

Statistilist arvestust juhib NSV Liidu Ministrite Nõukogu juures asuv Statistika Keskvalitsus (lüh. NSV Liidu SKV), liiduvabariikide ministrite nõukogude juures on liiduvabariikide statistika keskvalitsused.

1.2. NÄHTUS

Statistika uurib massnähtusi. Nähtuseks nimetatakse statistikas äärmiselt mitmekesiseid statistilise vaatlusega hõlmatavaid objekte. Nii käsitletakse nähtusena rahvastikku, tööstust, töötasu ja muid erinevaid objekte. Nähtused võivad olla kas esemed või sündmused, nende kogumid. Kvantitatiivselt eristame üksik- ja massnähtusi. Massnähtused koosnevad alati teatavast hulgast üksiknähtustest. Toode on üksiknähtus, toodang massnähtus; inimene üksiknähtus, rahvastik või teatav töötajate kollektiiv massnähtus. Massnähtusi nimetatakse statistikas ka kogumiteks. Üksiknähtused esinevad kogumi liikmetena, elementidena. Statistika uurib massnähtusi ehk üksiknähtuste kogumeid, üksiknähtused huvitavad teda ainult kui kogumi liikmed [2]. Filosoofias on nähtuse mõiste laiem kui statistikas.

1.3. VAATLUS JA KATSE

Mitmesuguste massnähtuste, esemete või sündmuste kogumite uurimise algetapp on statistikas vaatlus. Tõenäosusteoorias vastab vaatlusele katse või katsete seeria. Katseks nimetatakse kindlate tingimuste kompleksi täitmist, kusjuures teatav sündmus toimub või ei toimu. Sündmust kui nähtust iseloomustab eelkõige tema toimumise fakt ja kestus. Sündmuse mõistega on vahetult seotud protsessi mõiste. Viimast võib iseloomustada kui pikemat aega kestvat või üha korduvat sündmust. Sündmus ja protsess on seega eri liiki nähtused.

Statistika üldteoorias eristatakse esemete ja sündmuste kogumeid. Tõenäosusteooria terminoloogiat kasutades võib aga ka esemete kogumite uurimist käsitleda sündmuste kogumite uurimisena. Sündmuseks on sellisel juhul vaadeldava tunnuse (selle teatava väärtuse) esinemine või mitteesinemine.

Sündmust, mis võib teatavates tingimustes toimuda ja võib ka mitte toimuda, nimetatakse juhuslikuks. Kindel sündmus samades tingimustes toimub tingimata, võimatu sündmuse toimumine on aga välistatud.

Sündmuse toimumine või esinemine selgub katse (vaatluse) tulemusena. Mõnel juhul saadakse katsete tulemuste hulk, mis vastab ühele

sündmusele. Töötajate kollektiivi uurimisel kõrgema hariduse omamise seisukohalt on selle hariduse omamine üks sündmus. Iga töötaja küsitlemisel (vaatlemisel, katse sooritamisel) võib saada vastuseks «*ja*» (sündmus toimub) või «*ei*» (sündmus ei toimu).

Majanduslike nähtuste uurimisel käsitletakse andmete hankimist uuritava objekti kohta statistilise vaatlusena, toimugu see siis kirjalike allikate järgi või katsete sooritamise teel.

1.4. TUNNUS

Igal nähtusel on teatud hulk iseloomulikke jooni, omadusi. Statistikas nimetatakse neid t u n n u s t e k s. Tunnuse peamine omadus on v a r i e e r u m i n e. See avaldub selles, et kvantitatiivse tunnuse väärtus on sama kogumi liikmetel tavaliselt mõnevõrra erinev või kvalitatiivne tunnus väljendatav eri sõnaga. Kui kvalitatiivsel tunnusel saab olla vaid kaks varianti, siis nimetatakse seda tunnust a l t e r n a t i i v s e k s. Kvalitatiivseid tunnuseid nimetatakse ka a t r i b u t i i v s e t e k s.

Kvantitatiivsed tunnused võivad olla sõredad või pidevad. S õ r e d a d t u n n u s e d võivad olla ainult teatava mitte pidevalt muutuva väärtusega, näiteks väljenduda ainult täisarvuga (inimeste arv). P i d e v a d t u n n u s e d võivad oma väärtusvaru (võimaliku väärtuse) piires olla mistahes väärtusega. Kuna pidevaid tunnuseid väljendatakse tavaliselt piiratud täpsusega (ümardatult), siis muutuvad nad t i n g l i k u l t s õ r e d a t e k s. Tööstaaž on pidev tunnus, kuid

tavaliselt esitatakse seda tinglikult sõreda tunnusena täisaastates.

Statistiliste meetoditega uuritakse peamiselt kvantitatiivselt väljendatavaid tunnuseid, nende varieerumist. Kuid statistikal on meetodeid ka selliste kogumite iseloomustamiseks ja analüüsimiseks, mille elementide tunnused on väljendatavad vaid kvalitatiivselt.

1.5. SUURUS JA ARV

S u u r u s t e k s nimetatakse statistikas teaduslikult määratletud kvantitatiivselt mõõdetavaid kategooriaid ehk mõisteid. Suurused on defineeritavad teatud tunnuse (tunnuste) kaudu. Suurused jagunevad a b s o l u u t s e t e k s ja s u h t e l i s t e k s. Suhteliste ja absoluutsete suuruste väärtusi väljendavad a b s o l u u t- ja s u h t a r v u d. [2] Suhtarvude leidmist on käsitletud käsiraamatu teises peatükis.

Statistika üldteoorias ning majandusstatistikas käsitletakse üldiselt absoluutseid ja suhtelisi suurusi ning neile vastavaid arve arvestamata nende väärtuste juhuslikkust. Tõenäosusteooria rakendamisel vaatlustulemuste hindamiseks osutub see aga paratamatuks. Tõenäosusteooria käsitleb eelkõige juhuslikke suurusi. J u h u s l i k s u u r u s on elementaarsündmuse funktsioon. Juhuslikku suurust iseloomustab kõigepealt tema võimalike väärtuste hulk. Täielikuma ettekujutuse juhusliku suuruse kohta annab tema jaotus. Juhuslikku suurust nimetatakse mõnel juhul ka j u h u s l i k u k s m u u t u j a k s. Üldiselt käsitletakse statistikas juhusliku suurusena (juhusliku muutujana) kvantitatiivselt mõõdetavat tunnust.

1.6. KARAKTERISTIK

Karakteristikuteks nimetatakse statistikas mitmesuguseid suurusi ja näitarve, näiteks keskmisi, variatsiooninäitarve ja korrelatsioonikordajaid.

Nähtuste väljavõttelisel uurimisel eristatakse üld- ja väljavõtukogumi karakteristikuid. Inglise keeles kirjutavad statistikud nimetavad üldkogumi karakteristikuid parameetriteks ning väljavõtukogumi karakteristikuid *statistics*, eeldades, et parameetrid saavad olla vaid üldkogumil. Eesti keeles ei saa väljavõtukogumi karakteristikut nimetada statistikuks, mistõttu väljavõttelise vaatluse puhul täpsustatakse alati karakteristiku iseloom, kas on tegemist üld- või väljavõtukogumi karakteristikuga. Seetõttu kasutatakse harva ka parameetri mõistet.

Majandusteaduslikus kirjanduses kasutatakse palju näitaja mõistet, seda sageli nii karakteristiku kui ka sellele vastava arvu tähenduses.

1.7. READ

Ridadeks nimetatakse statistikas arvandmete kogumeid, olenemata sellest, kas arvud on paigutatud horisontaalselt (ridadena) või vertikaalselt (tulpadena).

Statistilised read liigitatakse järgmiselt:

1) jaotus- ehk variatsioonread,
2) aegread.

Jaotusread näitavad mingi kogumi elementide jagunemist uuritava tunnuse väärtuse järgi. Jaotusread liigitatakse lihtsateks ja rühmridadeks.

Lihtsates jaotusridades on vaatlusandmed või nende töötlemise tulemusena saadud arvud paigutatud ritta ilma rühmitamata, olgu siis järjestamata või järjestatult. Neid ridu nimetatakse tavaliselt lihtsateks statistilisteks ridadeks.

Rühmridades on vaatlusandmed või nende töötlemise tulemusena saadud arvud paigutatud ritta rühmitatult vastavalt nende väärtusele, kusjuures teises paralleelses reas esitatakse vastava väärtuse (variandi) esinemissagedus. Rühmridu nimetatakse tavaliselt statistilisteks jaotus- ehk variatsioonridadeks.

Tavalises kõnepruugis on seega kujunenud eespoolt toodust erinev ridade liigitus:

1) statistilised read (ilma aegridadeta);
2) aegread.

Statistilised read (ilma aegridadeta) jagunevad seejuures lihtsateks ja variatsioonridadeks. Variatsioonread (täpsemalt rühmread) jaotatakse intervallimata ja intervallridadeks. Viimastes esitatakse tunnuste tegelike väärtuste asemel teatavad väärtuste vahemikud.

Intervallridade moodustamine võimaldab lühendada lihtsaid ridu ja intervallimata rühmridu.

Aegread liigitatakse periood- ja momentridadeks (vt. jaot. 8.1).

1.8. REA ELEMENTIDE TÄHISTAMINE

Variatsioonridade formaliseeritud esitamisel tähistatakse vaadeldav tunnus tavaliselt x-iga. Igale x väärtusele (variandile) omistatakse järjekorranumber i, mis muutub 1-st n-ni, kus n on viimane järjekorranumber.

Kui variandid esinevad teatava sagedusega, siis tähistatakse sagedust tavaliselt f-iga. Igale

Tabel 1.1

Tsehhis «N» toodetud detailide kaal

Jrk. nr.	Detailide kaal	Detailide arv	Formaliseeritult	
			Variant (x_i)	Sagedus (f_i)
1	317	20	x_1	f_1
2	318	40	x_2	f_2
3	319	40	x_3	f_3
4	320	60	x_4	f_4
5	321	20	x_5	f_5
6	322	10	x_6	f_6
7	323	10	x_7	f_7
Kokku	×	200	×	×

variandile vastav sagedus tähistatakse sama järjekorranumbriga, mis on variandil, seega 1-st n-ni.

Tabelis 1.1 on toodud näide variatsioonridade formaliseeritud tähistamise kohta.

Tabelis 1.1 x_i on detailide kaal ($i=1, 2, \ldots, 7$); ja f_i — detailide arv ($i=1, 2, \ldots, 7$).

Variandi ja sageduse järjekorranumbri formaalne tähistamine i-ga, mis muutub ühest n-ni, on traditsiooniline, mistõttu üsna sageli jäetakse sulgudesse kirjutatav ($i=1, 2, \ldots, n$) kirjutamata. Juhtub, et i-gi jääb $x-i$ juurde märkimata.

Kui samaaegselt uuritakse mitme tunnuse väärtusi, siis kasutatakse tunnuste tähistamiseks tavaliselt x kõrval kahe tunnuse puhul veel y-it, kolme tunnuse puhul veel z-ti. Kuid on ka teisi tähistus-

viise, eriti seoste uurimisel, samuti väljavõttelise vaatluse puhul.

Aegridade puhul kasutatakse tavaliselt rea elementide väärtuste formaliseeritud tähistamiseks y-it.

1.9. RÜHMITAMINE

Rühmitamine on kogumi elementide jaotamine rühmadesse teatud tunnuste või ühe tunnuse eri väärtuste alusel.

Rühmitamine on statistilise uurimistöö üks olulisemaid meetodeid. Seda rakendatakse nii vaatlusandmete esmasel töötlemisel kui ka edasise analüüsi käigus.

Eristatakse lihtsat ja kombineeritud rühmitamist.

Lihtsa rühmitamise puhul on rühmitamise aluseks tunnuste loetelu või ühe tunnuse erinevad väärtused.

Kombineeritud rühmitamisel on rühmitamise aluseks mitme tunnuse erinevad väärtused või erinevad alternatiivsed tunnused.

Eristatakse järgmisi rühmitamisviise:

1) struktuuriline;
2) tüpoloogiline;
3) analüütiline.

Struktuurilisel rühmitamisel on rühmitamise aluseks ühe tunnuse erinevad väärtused. Selle eesmärgiks on saada kvalitatiivselt ühtlase kogumi kvantitatiivse hinnangu järgi erinevad rühmad, kuid siingi võivad selguda olulised kvalitatiivsed erinevused.

Tüpoloogilisel rühmitamisel on rühmitamise aluseks erinevad tunnused. Selle eesmärk on saada ühetüübilised rühmad.

KUSTUTATUD
1. 06. 2020
S. M. Kirovi nim.
Viimsi Raamatukogu
RAAMATUKOGU

Analüütilise rühmitamise eesmärk on avastada ühe või mitme nähtuse tunnuste vahelisi seoseid. Analüütilisel rühmitamisel on rühmitamise aluseks mitu tunnust kombineeritult.

1.10. SUMMA

Statistilises uurimistöös on väga sageli vaja teada kogumi elementide arvu ja nende väärtuste summat, samuti mitmesuguste uurimise käigus tuletatud väärtuste (hälbed, korrutised) summat.

Summat tähistatakse statistikas formaliseeritult, kreeka suurtähega Σ (*sigma*). Summa märgi taha kirjutatakse summeeritavate variantide tähis ja järjekorranumbrite indeks, näiteks x_i, summa märgi juurde aga märgitakse järjekorranumbrite muutumise piirid. Kui x-il on n varianti, siis $i=1, 2, \ldots, n$. Võib kirjutada järgmise võrduse:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Tabelis 1.1 toodud detailide kaalude summal ei ole mõtet, sest igas kaalurühmas on hulk detaile, küll aga sageduste (f) summal. Selle leidmise võib tähistada järgmiselt:

$$\sum_{i=1}^{7} f_i=f_1+f_2+\ldots+f_7=20+40+40+60+20+$$
$$+10+10=200.$$

Rea kõikide elementide liitmise korral jäetakse sageli liidetavate arv märkimata ja kirjutatakse lihtsalt Σx_i või koguni Σx, mis ei ole päris korrektne, kuid on siiski arusaadav.

Mitmesuguste karakteristikute arvutamise valemites on tarvis lühidalt tähistada korrutiste summat. Seda tehakse järgmiselt:

$$x_1f_1+x_2f_2+\ldots+x_nf_n=\sum_{i=1}^{n} x_if_i.$$

Tabelis 1.1. toodud detailide kaalude summal ei olnud mõtet, kuid kaalude ja detailide arvude korrutiste summal on mõte, see on vaadeldava detailide kogumi kogukaal.

1.11. KORRUTIS

Rea elementide omavahelist korrutamist esineb statistikas suhteliselt harva, kuid siiski esineb, näiteks geomeetrilise keskmise leidmisel.

Korrutist tähistatakse statistikas formaliseeritult kreeka suurtähega Π (*pii*). Korrutise märgi taha kirjutatakse korrutatavate variantide tähis ja järjekorranumbrite indeks, näiteks x_i, korrutise märgi juurde aga märgitakse järjekorranumbrite muutumise piirid. Kui x-il on n varianti, siis $i=1, 2, \ldots, n$. Võib kirjutada järgmise võrduse:

$$x_1x_2\ldots x_n=\prod_{i=1}^{n} x_i.$$

Kui korrutada tuleb järgmised x-i väärtused: $x_1=7$; $x_2=3$ ja $x_3=5$, siis võib korrutise leidmise kirjutada järgmiselt:

$$\prod_{i=1}^{3} x_i=x_1x_2x_3=7\cdot3\cdot5=105.$$

Rea kõikide elementide korrutamise korral jäetakse sageli korrutatavate arv märkimata ja kirjutatakse lihtsalt Πx_i või Πx, mis ei ole päris korrektne, kuid on siiski lubatav, kui see ei välista arusaamist, milliste elementide korrutisega on tegemist.

1.12. TABELID

Statistilisi andmeid esitatakse kõige sagedamini tabelites. Tabeli osad on:

1) tabeli sõrestik,
2) tabeli pealkiri,
3) tabeli number,
4) täiendavad märkused ja viited.

Tabeli pealkiri peab andma lühikese, kuid siiski ammendava refereeringu tabeli sisu kohta. Pealkirjata tabelite kasutamist ei soovitata, ainult väikeseid vahetult tekstiga seotud tabeleid võib paigutada teksti vahele.

Kui töös on rohkem kui üks tabel, siis tuleb tabelid nummerdada. Tabelid nummerdatakse järjekorras, alates töö algusest (tabel 1, tabel 2 jne.) või peatükkide kaupa (tabel 1.1, tabel 1.2 jne.; tabel 2.1, tabel 2.2 jne.).

Tabeli sõrestiku moodustavad read ja veerud. Nende ristumiskohal tekivad lahtrid. Sageli kasutatakse mõistet «lahter» veeru tähenduses, mida tuleks vältida.

Veergude pealkirjad moodustavad tabeli pea. Ridade pealkirjad paigutatakse esiveergu (veergudesse). Tabelite read ja veerud on soovitatav nummerdada, seda eriti ridade ja veergude suure arvu korral.

Tabeli juurde võivad kuuluda märkused tabelis sisalduvate arvude selgitamiseks. Märkused paigutatakse tabeli või joone alla ning peavad olema nummerdatud. Sama viitenumber märgitakse ka selgitust vajava rea või veeru pealkirja lõppu või üksikarvu lahtrisse.

1.13. ARVJOONISED

Tabelite kõrval kasutatakse statistiliste andmete esitamiseks sageli ka arvjooniseid. Samade andmete esitamine tabeli ja arvjoonisena ühes töös ei ole soovitatav. Arvjooniste järgi on võimalik teha vaadeldavate nähtuste kohta ka analüütilisi järeldusi. Arvjooniste õige konstrueerimise ja kasutamise probleem on küllaltki ulatuslik ning seda on käsitatud eri raamatutes [3; 4].

Kõige üldisemalt liigitatakse arvjoonised järgmiselt:

1) näitlikud arvjoonised;
2) analüütilised arvjoonised.

Kujutatavate nähtuste arvu järgi eristatakse järgmisi arvjooniseid:

1) lihtarvjoonised;
2) liitarvjoonised.

Lihtarvjoonisel kujutatakse üht nähtust või tunnust, liitarvjoonisel mitut.

Kasutamisotstarbe järgi liigitatakse arvjoonised järgmiselt:

1) võrdlusarvjoonised;
2) struktuurarvjoonised;
3) seosearvjoonised.

Kujunduslikult eristatakse järgmisi arvjooniseid:

1) joondiagrammid (graafikud);
2) tulpdiagrammid;
3) histogrammid;
4) lintdiagrammid;
5) rahvastikupüramiidid (lintdiagrammi eri liik);
6) ümardiagrammid;
7) sektordiagrammid (ümardiagrammi eri liik);

8) kartogrammid;
9) kartodiagrammid;
10) korrelatsioonidiagrammid jne.

Kujutatava rea järgi eristatakse variatsioonridade ja aegridade arvjooniseid.

Arvjoonise koostisosad on:
1) koordinaatvõrk;
2) skaalad;
3) legend;
4) peal- või allkiri;
5) number;
6) viited.

Arvjoonise kujundus oleneb esitatavast nähtusest. Tuleb tähele panna, et skaalad algaksid nullpunktist. Kui see ei ole võimalik, siis tuleb diagrammiväli katkestada. Vastav katkestus märgitakse diagrammivälja vasakus alumises nurgas väikese sakiga teise skaala alguses või mõlema skaala katkestamisel sakiga mõlemal skaalal. Erandiks on korrelatsioonidiagrammid, kus skaalad ei pea ristuma nullpunktis. Indeksdiagrammil on rõhtteljeks 1,0 ehk 100 protsendi joon ning skaala võib jätkuda ka allpool telge.

Nähtuste ajalist muutumist iseloomustavate joondiagrammide kujundamisel tuleb eristada periood- ja momentridu. Perioodrea elementide väärtused märgitakse diagrammiväljal rõhtskaala jaotuste (aastad, kuud jne.) keskele ning perioode iseloomustavad arvud kirjutatakse skaala alla koordinaatvõrgu joonte vahele. Koordinaatvõrgu püstjooned eraldavad siin üksikuid perioode. Momentrea elementide väärtused märgitakse koordinaatvõrgu püstjoontele ning momente iseloomustavad arvud (näit. kuupäev) kirjutatakse püstjoonte alla. Koordinaatvõrgu püstjoo-

ned tähistavad siin momente, nende vahele jääv diagrammiväli aga momentide vahelist perioodi. Perioodridu on kujutatud joonistel 8.1 ja 8.2. Ka joonisel 8.3 esitatud indeksdiagramm on tehtud perioodrea andmete alusel.

Majanduslike nähtuste ajalise muutumise iseloomustamisel kasutatakse eriti sagedasti tulpdiagramme. Nende kujundamisel tuleb jälgida, et tulpade vahed vastaksid vaadeldava suuruse muutumise ajale. Nii näiteks tekitab visuaalselt petliku ettekujutuse nähtuse muutumisest tulpdiagramm, kus vaadeldava nähtuse väärtusi teataval viisaastakul iseloomustavate tulpade kõrvale on sama vahemiku järele joonistatud sama suuruse järgmise viisaastaku viimase aasta väärtust kajastav tulp.

Histogrammid sobivad eelkõige intervallitud variatsioonridade iseloomustamiseks ja analüüsimiseks (vt. joonis 3.2).

Lintdiagramme võib kasutada samade nähtuste iseloomustamiseks, mille puhul on sobivad tulpdiagrammid. Lintdiagramme kasutatakse sliski peamiselt mitmesuguste võrdluste tegemisel, näiteks plaaniülesannete ja nende täitmise võrdlemisel.

Ümardiagrammide kasutamisel võrreldakse vaadeldavaid nähtusi või teatava suuruse eri väärtusi kujundite (peamiselt ringide) pindalade kõrvutamise teel. Erinevuse kajastamine raadiuse või läbimõõdu proportsionaalse muutmise teel tekitab kasvust väära mulje. Sektordiagrammidel on ringid või sõõrid jaotatud sektoriteks vastavalt vaadeldava nähtuse koostisele. Ring jagatakse sektoriteks vastavalt osakogumite osamääradele. Osamäära ühele protsendile vastab sektori nurga 3,6°. Ringi jagamisel jooni-

sel sektoriteks on soovitatav alustada raadiusest, mis läbib ringi ülemise tipu.

Majandusgeograafilistes töödes kasutatakse rohkesti kartogramme ja kartodiagramme. Kartogrammidel iseloomustatakse nähtuste ruumilist levikut vaadeldava ala eri osade erineva märgistamise (värv, viirutus jm.) teel.

Kartodiagrammidel iseloomustatakse nähtuste ruumilist levikut ja vajaduse korral ka arengut analoogiliste diagrammide paigutamise teel vaadeldava ala eri osadesse.

Korrelatsioonidiagrammide abil väljendatakse nähtuste või tunnuste vahelisi seoseid (vt. joonis 7.1).

II SUHTARVUD

Suhtarvud väljendavad suhteliste suuruste väärtusi, nii nagu absoluutarvud väljendavad absoluutsete suuruste väärtusi. Suurusteks nimetatakse statistikas teaduslikult määratletud, teatud tunnuste kaudu defineeritavaid ning kvantitatiivselt mõõdetavaid kategooriaid ehk mõisteid. Suhtelised suurused on tunnetuslikult sekundaarsed, neid saab defineerida ja mõõta ainult absoluutsuuruste kaudu. Iga erinevat suhtelist suurust väljendab erineva sisuga suhtarv, kuigi erinevate suhteliste suuruste väärtused võivad olla samad. Suhtarvud saadakse jagamise teel. Enamik majanduslikus analüüsis kasutatavatest näitajatest on suhtarvud. Näitaja all mõistetakse tavaliselt nii statistilist suurust kui ka arvu, suuruse numbrilist väärtust.

Suhtarvude liigitus ei ole veel välja kujunenud. Statistika üldteooriat käsitlevad autorid annavad oma teostes küllaltki erinevaid liigitusi. Käesolevas käsiraamatus on kasutatud prof. U. Mereste suhtarvude klassifikatsiooni [2].

2.1. STRUKTUURISUHTARVUD

Struktuurisuhtarvud iseloomustavad üldkogumi jagunemist mitmesugusteks eri tunnustega osakogumiteks. Struktuurisuhtarve nimetatakse ka koostissuhtarvudeks, osamääradeks ja osatähtsusteks.

Struktuurisuhtarvud leitakse valemiga:

$$\psi_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} c,$$

kus ψ_i on mistahes struktuurisuhtarv;
x_i — osakogumi maht või liikmete arv;
c — mingi muutumatu kordaja (konstant).

Kui suhtarvud leitakse vahetu suhtena, siis $c=1$, kui protsentides või promillides, siis vastavalt $c=100$ või 1000. Vajaduse korral võib muutumatu kordajana kasutada ka mistahes teist arvu.

Kõigi struktuurisuhtarvude summa võrdub muutumatu kordajaga

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i = c.$$

Struktuurisuhtarvude arvutamist iseloomustab tabelis 2.1 toodud näide, kusjuures veergudes 1, 2 ja 3 on toodud lähteandmed ning veergudes 4, 5 ja 6 struktuurisuhtarvud.

Tabel 2.1

Tehase «K» töötajate jagunemine tsehhidesse (absoluut- ja suhtarvudes)

Tsehh	Töötajate arvu tähis	Töötajate arv	Suhtarvu tähis	Suhtarv vahetu suhtena	Suhtarv protsentides
1	2	3	4	5	6
I	x_1	100	ψ_1	0,20	20
II	x_2	200	ψ_2	0,40	40
III	x_3	125	ψ_3	0,25	25
IV	x_4	75	ψ_4	0,15	15
Kokku	Σx_i	500	$\Sigma \psi_i$	1,00	100

2.2. KOORDINATSIOONISUHTARVUD

Koordinatsioonisuhtarvud iseloomustavad proportsioone ühe kogumi erinevate koostisosade (osakogumite) vahel.

Koordinatsioonisuhtarvud leitakse valemiga:

$$g_{i/k} = \frac{x_i}{x_k},$$

kus $g_{i/k}$ on mistahes koordinatsioonisuhtarv;
x_i — osakogumi maht või liikmete arv;
x_k — teise osakogumi maht või liikmete arv.

Koordinatsioonisuhtarvude leidmisel võib absoluutarvude asemel kasutada ka struktuurisuhtarve:

$$g_{i/k} = \frac{x_i}{x_k} = \frac{\psi_i}{\psi_k}.$$

Koordinatsioonisuhtarvud leitakse tavaliselt vahetu suhtena, kuid neid võib ka korrutada vabalt valitud kordajaga. Viimasel juhul tuleb neid ka vastavalt refereerida.

Tabeli 2.1 andmete alusel võib leida üksikute tsehhide töötajate arvude vahel esinevaid proportsioone iseloomustavad koordinatsioonisuhtarvud. Esimese ja teise tsehhi töötajate arvu vahelist proportsiooni väljendab koordinatsioonisuhtarv:

$$g_{1/2} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{100}{200} = 0{,}5.$$

Saadud suhtarvu on ebamugav sõnastada. Selle arvu korrutis 100-ga on 50. Nüüd võib väita, et esimese tsehhi töötajate arv moodustab 50 protsenti teise tsehhi töötajate arvust. Kui leitud suht-

arvu korrutada 10-ga, siis võib ütelda, et iga 10 teise tsehhi töötaja kohta tuleb 5 esimese tsehhi töötajat.

Ühe kogumi kohta, kus on n osakogumit, saab leida $n^2 - n$ koordinatsioonisuhtarvu. Kõik nad on sisukad. Koordinatsioonisuhtarv $\xi_{i/k}$ on koordinatsioonisuhtarvu $\xi_{k/i}$ pöördväärtus.

Tabeli 2.1 andmete alusel väljendab teise ja esimese tsehhi töötajate arvu vahelist proportsiooni koordinatsioonisuhtarv:

$$\xi_{2/1} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{200}{100} = 2{,}0.$$

See on koordinatsioonisuhtarvu $\xi_{1/2}$ pöördväärtus.

$$\xi_{2/1} = \frac{1}{\xi_{1/2}} = \frac{1}{0{,}5} = 2{,}0.$$

Seda suhtarvu võime refereerida selliselt, et iga esimese tsehhi töötaja kohta tuleb 2 teise tsehhi töötajat. Kui korrutame leitud suhtarvu 100-ga, siis võime väita, et teise tsehhi töötajate arv moodustab 200 protsenti esimese tsehhi töötajate arvust, iga 100 esimese tsehhi töötaja kohta tuleb 200 teise tsehhi töötajat.

2.3. DÜNAAMIKASUHTARVUD

Dünaamikasuhtarvud iseloomustavad nähtuste ajalise muutumise intensiivsust. Neid nimetatakse ka arengusuhtarvudeks. Oma olemuselt on need suhtarvud indeksid, mistõttu neid käsitletakse ka indeksiteoorias (vt. jaot. 9.2). Dünaamikasuhtarve kasutatakse peamiselt aegridade elementaaranalüüsis (vt. jaot. 8.2), kus neid nimetatakse kasvutempodeks.

Et dünaamikasuhtarvud on ühtlasi indeksid (eelkõige individuaalindeksid), siis on neid siin tähistatud i-ga (tavaliselt individuaalindeksi tähis). Dünaamikasuhtarvude tähistamiseks kasutatakse sageli ka mitmesuguseid muid tähiseid, näiteks tähte k (lühend kasvutempost). Aegrea elemente tähistatakse tavaliselt y-ga.

Dünaamikasuhtarvud leitakse valemiga:

$$i = \frac{y_t}{y_k},$$

kus i on dünaamikasuhtarv (kasvutempo, indeks);
y_t — aegrea elemendi väärtus perioodil või momendil t ($t = 2, \ldots, n$);
y_k — aegrea elemendi väärtus mingil eelneval perioodil või momendil k ($k = 1, \ldots, n-1$).

Kui dünaamikasuhtarvud leitakse järjestikku eelmiste elementide väärtuste suhtes, siis on tegemist ahelindeksitega, ahelkasvutempodega. Vastava valemi võib kirjutada järgmiselt:

$$i^a = \frac{y_t}{y_{t-1}},$$

kus i^a on ahelkasvutempo;
y_{t-1} — aegrea elemendi väärtus eelmisel perioodil või momendil.

Kui dünaamikasuhtarvud leitakse aegrea ühe kindla eelneva perioodi või momendi elemendi väärtuse suhtes, näiteks esimese perioodi või momendi väärtuse suhtes, siis on tegemist alus- ehk baasiindeksitega, alus- ehk baasikasvutem-

Tabel 2.2

Ettevõtte «N» toodang viiel perioodil (tk.) ja selle ajalise muutumise suhtarvud

Näitaja ja selle tähis	Periood				
	I	II	III	IV	V
Toodangu tähis	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
Toodang	4000	4400	4800	5000	6000
Ahelkasvutempo tähis	—	$i_1{}^a$	$i_2{}^a$	$i_3{}^a$	$i_4{}^a$
Ahelkasvutempo	—	1,10	1,09	1,04	1,20
Aluskasvutempo tähis	—	$i_1{}^b$	$i_2{}^b$	$i_3{}^b$	$i_4{}^b$
Aluskasvutempo	—	1,10	1,20	1,25	1,50

podega. Vastava valemi võib kirjutada järgmiselt:

$$i^b = \frac{y_t}{y_1},$$

kus i^b on aluskasvutempo;
y_1 — aluseks võetud elemendi väärtus.

Esimene ahel- ja aluskasvutempo on võrdsed, $i_1^a = i_1^b$. Kõigi ahelkasvutempode korrutis annab viimase aluskasvutempo

$$\prod_{k=1}^{n} i_k^a = i_n^b.$$

Ahel- ja aluskasvutempode arvutamise näide on toodud tabelis 2.2. Lähteandmeteks on ettevõtte toodang viiel perioodil.

Tabelis toodud suhtarvude järgi võib veenduda, et esimene ahel- ja aluskasvutempo on võrdsed,

$i_1^a = i_1^b = 1{,}10$. Võib kontrollida ka seda, et ahelkasvutempode korrutis võrdub viimase aluskasvutempoga:

$$i_1^a i_2^a i_3^a i_4^a = i_4^b = 1{,}10 \cdot 1{,}09 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}20 = 1{,}50.$$

Ajalise muutumise suhtarve väljendatakse sageli protsentides. Selleks korrutatakse vahetu suhtena leitud suhtarvud 100-ga.

Vaadeldaval juhul on viimane aluskasvutempo 1,5 ehk 150 protsenti.

Nähtuste ajalise muutumise iseloomustamisel kasutatakse veel absoluutse juurdekasvu alusel leitud suhtarve (vt. jaot. 8.2.1).

Prof. U. Mereste on kujukalt tõestanud, et plaaniülesande suhtarvud ehk plaanisuhtarvud ja plaani täitmise suhtarvud kuuluvad tavaliste dünaamikasuhtarvudega ühte süsteemi, mistõttu nende käsitlemine iseseisva suhtarvude liigina ei ole põhjendatud [2].

Plaanisuhtarvud leitakse valemiga:

$$i^{pl} = \frac{y_{t,pl}}{y_{t-1}},$$

kus i^{pl} on plaaniline kasvutempo;
$y_{t,pl}$ — plaaniline aegrea elemendi väärtus.

Plaanisuhtarvud võib leida ka aluskasvutempodena mingi kindla aluse suhtes, näiteks viisaastakule eelneva aasta elemendi väärtuse suhtes.

Plaani täitmise suhtarvud leitakse valemiga:

$$i^{pl.t} = \frac{y_t}{y_{t,pl}},$$

kus $i_{pl.t}$ on plaani täitmise suhtarv.

Tabel 2.3

Ettevõtte plaaniline ja tegelik toodang (tk.) kolmel perioodil ning selle muutumist iseloomustavad suhtarvud

Näitaja ja selle tähis	Periood					
	I		II		III	
	Plaan	Tegelik	Plaan	Tegelik	Plaan	Tegelik
Toodangu tähis	$y_{1\,pl}$	y_1	$y_{2\,pl}$	y_2	$y_{3\,pl}$	y_3
Toodang	3000	3000	3300	3500	3675	3850
Plaanilise ahelkasvutempo tähis	—	—	$i_1^{a.pl}$	—	$i_2^{a.pl}$	—
Plaaniline ahelkasvutempo	—	—	1,10	—	1,05	—
Plaani täitmise suhtarvu tähis	—	$i_1^{pl.t}$	—	$i_2^{pl.t}$	—	$i_3^{pl.t}$
Plaani täitmise suhtarv	—	1,00	—	1,06	—	1,05
Tegeliku ahelkasvutempo tähis	—	—	—	i_1^{a}	—	i_2^{a}
Tegelik ahelkasvutempo	—	—	—	1,17	—	1,10
Plaanilise aluskasvutempo tähis	—	—	$i_1^{b.pl}$	—	$i_2^{b.pl}$	—
Plaaniline aluskasvutempo	—	—	1,10	—	1,23	—
Tegeliku aluskasvutempo tähis	—	—	—	i_1^{b}	—	i_2^{b}
Tegelik aluskasvutempo	—	—	—	1,17	—	1,22

Plaanisuhtarvude ja plaani täitmise suhtarvude kuulumist ühte süsteemi dünaamikasuhtarvudega kinnitab asjaolu, et nende korrutis annab vastava tegeliku ahelkasvutempo:

$$i^{pl}i^{pl.t} = \frac{y_{t,pl}}{y_{t-1}} \cdot \frac{y_t}{y_{t,pl}} = \frac{y_t}{y_{t-1}} = i^a.$$

Plaani- ja plaani täitmise suhtarvude arvutamist iseloomustab tabelis 2.3 toodud näide.

Esimese perioodi kohta ei saa plaanisuhtarvu (plaanilist kasvutempot) leida, sest ei ole andmeid eelmise perioodi tegeliku toodangu kohta, seda võis ka üldse mitte olla (uue ettevõtte puhul).

Väidet, et plaanisuhtarvu (plaanilise kasvutempo) ja plaani täitmise suhtarvu korrutis annab tegeliku kasvutempo, kinnitavad tabeli andmed. Nii näiteks $i_1^{a,pl} = 1{,}1$ ja $i_2^{pl.t} = 1{,}06$, nende korrutis on $i_1^a = 1{,}17$. Plaani täitmise suhtarv on siin tähisindeksiga 2, teised suhtarvud aga tähisindeksiga 1, sest plaani täitmise suhtarve on sama palju kui vaadeldavaid perioode (kui ka esimesel perioodil on antud plaanitülesanne), teisi suhtarve aga ühe võrra vähem kui vaadeldavaid perioode.

Ka plaaniliste ahelkasvutempode korrutis annab plaanimisel viimase plaanilise aluskasvutempo.

2.4. HÄLBIMISSUHTARVUD

Hälbimissuhtarvud iseloomustavad vaadeldava tunnuse individuaalväärtuste kõrvalekaldumist selle tunnuse mingitest aluseks võetud väärtustest (normist, keskmisest). Hälbimissuhtarvud leitakse valemiga:

Tabel 2.4

Brigaadi tööliste tegelik ja normtoodang (kg) ning tegeliku toodangu hälbimine normi ja keskmise suhtes

Tööline	Tegelik toodang x_i	Norm x_a	Hälbimissuhtarv normi suhtes $x_i : x_a$	Hälbimissuhtarv keskmise suhtes $x_i : \bar{x}$ ($\bar{x}=420$)
Jaaniste	400	400	1,00	0,95
Malvaste	440	400	1,10	1,05
Sang	500	400	1,25	1,19
Uduste	380	400	0,95	0,90
Post	480	400	1,20	1,14

$$\beta_i = \frac{x_i}{x_a}.$$

kus β_i on hälbimissuhtarv;
x_i — vaadeldava tunnuse individuaalväärtus;
x_a — vaadeldava tunnuse aluseks võetud väärtus.

Hälbimissuhtarvud leitakse variatsioonrea andmetel. Erand on juhtum, kus meil on vaadeldava tunnuse kohta vaid üks individuaalväärtus. Vajaduse korral saab variatsioonreana esitada ka aegridade andmeid ning nende alusel leida individuaalväärtuste hälbeid keskmistest. Tegelike ja teoreetiliste aegridade võrdlemisel leiame hälbimissuhtarvud ükshaaval, iga kord on meil tegemist uue aluseks võetava väärtusega.

Praktikas kasutatavatest hälbimissuhtarvudest on tähtsamad normide täitmise ja variatsioonisuhtarvud. Nende arvutamist iseloomustab tabelis 2.4 toodud arvnäide.

Hälbimissuhtarve võib väljendada protsentides, korrutades vahetu suhtena leitud suhtarvud 100-ga.

2.5. VÕRDLUSSUHTARVUD

Võrdlussuhtarvud iseloomustavad paralleelselt eksisteerivate analoogiliste nähtuste (tunnuste väärtuste) vahelisi proportsioone. Võrdlussuhtarvud leitakse valemiga:

$$y_i = \frac{x_A}{x_B},$$

kus y_i on võrdlussuhtarv;
x_A — tunnuse väärtus kogumis A;
x_B — tunnuse väärtus kogumis B.

Võrdlussuhtarvude arvutamisel on eelduseks, et võrreldavate nähtuste vahel pole mingisuguseid alluvussuhteid ja et ka nende summa ei moodusta ühtset kogumit. Võrdlussuhtarve kasutatakse eriti sagedasti territoriaalseid üksusi iseloomustavate tunnuste, nendes toimuvate nähtuste võrdlemisel.

Kui võrreldavaid kogumeid saab vaadelda mingi üldkogumi osakogumitena, siis on meil võrdlussuhtarvude asemel tegemist koordinatsioonisuhtarvudega.

2.6. INTENSIIVSUSSUHTARVUD

Intensiivsussuhtarvud iseloomustavad kahe erineva omavahel seotud nähtuse tunnuste suhet. Need tunnused võivad olla väljendatud ka erinevates mõõtühikutes.

Intensiivsussuhtarvud leitakse valemiga:

$$\eta = \frac{x}{y},$$

kus η on intensiivsussuhtarv;
x — üht nähtust iseloomustava tunnuse väärtus;
y — teist nähtust iseloomustava tunnuse väärtus.

Intensiivsussuhtarvusid on kaks peamist liiki: tihedus- ja sagedussuhtarvud.

Tihedussuhtarvud leitakse kahe kogumi mahtusid väljendavate tunnuste väärtuste jagatisena ning nad näitavad, mitu lugejas oleva kogumi ühikut osaneb nimetajas oleva kogumi ühele ühikule. Üldtuntud tihedussuhtarv on rahvastiku tiheduse suhtarv (inim./km), mis leitakse vaadeldava territoriaalse üksuse rahvaarvu ja pindala jagatisena.

Sagedussuhtarvud leitakse teatavat kogumit iseloomustavate sündmuste (tunnuseks on siin sündmus) arvu ja teist kogumit iseloomustava tunnuse väärtuse jagatisena. Tüüpiline sagedussuhtarv on suremuskoefitsient, mis leitakse teatava perioodi surmajuhtumite arvu ja keskmise rahvaarvu jagatisena. Analoogiline näitarv on sündimuskoefitsient.

Kui leitavad intensiivsussuhtarvud on liiga väikesed, siis kasutatakse nimetajas esinevat tunnuse väärtust jagajaga. Abielulahutuste arvu ühe inimese kohta on väga ebamugav esitada (Eesti NSV-s 1975. aastal 0,0034 abielulahutust), hoopis parem on siin rääkida abielulahutuste arvust 1000 inimese kohta (Eesti NSV-s 1975. aastal 3,4 abielulahutust 1000 inimese kohta). Kasutatud jagaja on mõõtühikus kordaja. Kui leitavad intensiivsussuhtarvud väljenduvad liiga suurte arvudega, siis kasutatakse lugejas esineva tunnuse väärtust jagajaga ning sellele tunnusele vastavat mõõtühikut kordajaga.

Intensiivsussuhtarve kasutatakse nii riikide kui ka ettevõtete majanduse iseloomustamisel väga sageli. Intensiivsussuhtarvude ajalise muutumise iseloomustamisel leitakse dünaamikasuhtarvud, nüüd juba teiseste suhtarvudena.

Intensiivsussuhtarvud väljendavad ühe nähtuse jaotumist teise suhtes keskmiselt selle ühiku kohta, kuid seda ei ole vaja igal konkreetsel juhul ära märkida. Kui on juttu toodangust ühe töötaja kohta, siis on ilma täiendava seletuseta arusaadav, et räägitakse toodangust keskmiselt ühe töötaja kohta.

III KESKMISED

Keskmiste arvutamine on levinumaid kvantitatiivset laadi üldistuste tegemise viise. Vaatamata näilisele lihtsusele on keskmiste kasutamise ja arvutamise probleemid statistika üldteoorias üheks keskseks teemaks. Keskmiste õigeks sisuliseks kasutamiseks on soovitatav tutvuda vastavate teoreetiliste alustega [5, 6, 7, 8].

Keskmised jaotatakse enamasti kahte rühma: mahu- ja asendikeskmised.

Mahukeskmised reageerivad igale muutusele rea mistahes liikme väärtuses, millega kaasneb ka rea liikmete individuaalväärtuste summa ehk rea mahu muutumine.

Asendikeskmised reageerivad ainult niisugustele muutustele rea liikmete väärtuses, millega kaasneb ka olulisi nihkeid rea struktuuris. Seetõttu neid nimetatakse mõnel juhul ka struktuurikeskmisteks.

Peamised praktikas kasutatavad mahukeskmised on:

1) aritmeetiline keskmine;
2) harmooniline keskmine;
3) astmekeskmised;
4) geomeetriline keskmine;
5) kronoloogiline keskmine.

Tehakse vahet lihtsa ja kaalutud mahukeskmise vahel. Kaalutud keskmist kasutatakse variatsioonridade puhul, kui variandid esinevad erinevate sagedustega.

Peamised praktikas kasutatavad asendikeskmised on:

1) mood;
2) mediaan;
3) kvartiilid;
4) detsiilid;
5) tsentiilid.

Viimast nelja nimetatakse üldistatult kvantiilideks.

Eri keskmiste süsteemi moodustavad momendid, hälvete keskmised (vt. jaot. 5.1).

3.1. ARITMEETILINE KESKMINE

Aritmeetilist keskmist kasutatakse kõige sagedamini. Lihtsa aritmeetilise keskmise valem on:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n},$$

kus $\bar{x}$ on aritmeetiline keskmine;
x_i — rea liikmed (variandid);
n — rea liikmete arv.

Kaalutud aritmeetilise keskmise valem on:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i f_i}{\Sigma f_i},$$

kus f_i on variandi esinemissagedus.

Statistika üldteoorias on esikohal lõplike kogumite ja nende parameetrite uurimine. Matemaatilises statistikas uuritakse eelkõige juhuslikke muutuvaid suurusi, mistõttu aritmeetilist keskmist käsitatakse seal tõenäosusliku suurusena ning nimetatakse matemaatiliseks ootuseks.

Aritmeetilise keskmise arvutamist eeltoodud va-

Tabel 3.1

Ettevõtte «M» ühe brigaadi tööliste tööstaaž ja keskmise tööstaaži arvutused

Jrk. nr.	Töölise nimi	Tööstaaž x_i	Võrdse staažiga tööliste arv (f_i)	$x_i f_i$
1.	M. Jaaniste	2	2	4
2.	A. Taluste	2		
3.	S. Avamets	4	3	12
4.	N. Orgla	4		
5.	J. Mändmets	4		
6.	R. Karula	6	1	6
7.	V. Sangla	9	2	18
8.	M. Kiviränk	9		
Summa		40	8	40

lemite järgi selgitab tabelis 3.1 toodud arvnäide. Aritmeetilise keskmise arvutamise lihtsustatud võtteid, mis eeldavad täiendavaid teadmisi statistika üldteooriast, on käsitletud järgmistes jaotistes.

$$\bar{x}=\frac{\Sigma x_i}{n}=\frac{2+2+4+4+4+6+9+9}{8}=\frac{40}{8}=5;$$

$$\bar{x}=\frac{\Sigma x_i f_i}{\Sigma f_i}=\frac{4+12+6+18}{8}=\frac{40}{8}=5.$$

3.1.1. Aritmeetilise keskmise arvutamist lihtsustavad omadused

Statistikas formuleeritud aritmeetilise keskmise omadused soodustavad tema mõistmist ja arvutamist. Esitame siin peamiselt need, mis soodustavad arvutamist.

1. Variantide individuaalväärtuste ja nende aritmeetilise keskmise vaheliste hälvete summa on null. Formaliseeritult saab seda esitada järgmiselt:

$$\Sigma(x_i-\bar{x})=0.$$

Esitatud omadust nimetatakse sageli aritmeetilise keskmise põhiomaduseks. Selle omaduse tundmine aritmeetilise keskmise arvutamist otseselt ei soodusta, küll aga kaudselt. See võimaldab paremini mõista aritmeetilise keskmise olemust ja ka arvutuskäiku.

2. Mistahes suuruste summa (vahe) aritmeetiline keskmine on võrdne nende suuruste aritmeetiliste keskmiste summaga (vahega). Seega

$$\overline{x\pm y}=\bar{x}\pm\bar{y}.$$

3. Kui vähendada (suurendada) variantide väärtusi mingi meelevaldse arvu a võrra, siis väheneb (suureneb) nende aritmeetiline keskmine sama arvu võrra.

Selle omaduse alusel võib arvutamise lihtsustamiseks variantide väärtusi suvaliselt vähendada või suurendada meelevaldselt valitud arvu võrra, lõpptulemuse leidmisel peab aga meelevaldselt valitud arvu vastavalt liitma või lahutama. Aritmeetilise keskmise leidmise valemid võib eeltoodud omaduse alusel esitada järgmisel kujul:

a) lihtne aritmeetiline keskmine:

$$\bar{x}=\frac{\Sigma(x_i\mp a)}{n}\pm a;$$

b) kaalutud aritmeetiline keskmine:

$$\bar{x}=\frac{\Sigma(x_i\mp a)f_i}{\Sigma f_i}\pm a.$$

4. Kui vähendada (suurendada) variantide väärtusi mingi meelevaldne arv k korda, siis väheneb (suureneb) nende aritmeetiline keskmine sama arv korda.

Selle omaduse alusel võib arvutamise lihtsustamiseks variantide väärtusi suvaliselt vähendada või suurendada meelevaldselt valitud arv korda, lõpptulemuse leidmisel peab aga vähendatud arvudega leitud keskmist vastavalt suurendama või vähendama sama arv korda. Kaalutud aritmeetilise keskmise arvutamise valemid võib eeltoodud omaduse alusel esitada järgmisel kujul:

a) variantide vähendamisel:

$$\bar{x}=\frac{\Sigma\frac{x_i}{k}f_i}{\Sigma f_i}\cdot k;$$

b) variantide suurendamisel:

$$\bar{x}=\frac{\Sigma x_i k f_i}{\Sigma f_i}:k.$$

5. Kui vähendada (suurendada) variantide kaalusid ehk esinemissagedusi mingi meelevaldne arv h korda, siis aritmeetiline keskmine ei muutu.

Selle omaduse alusel võib muuta variantide kaalusid suvaliselt meelevaldse arvu h korda ilma tulemust muutmata. Aritmeetilise keskmise valem võib seega olla esitatud ka järgmisel kujul:

a) kaalude vähendamisel:

$$\bar{x}=\frac{\Sigma x_i\frac{f_i}{h}}{\Sigma\frac{f_i}{h}};$$

b) kaalude suurendamisel:

$$\bar{x}=\frac{\Sigma x_i f_i h}{\Sigma f_i h}.$$

Kolme viimatimainitud omadust võib sobivate lähteandmete korral rakendada korraga. Variantide vähendamisel meelevaldselt valitud arvu a võrra ja arv k korda ning kaalude vähendamisel arv h korda omandab kaalutud aritmeetilise keskmise valem järgmise kuju:

Tabel 3.2

Aritmeetilise keskmise lihtsustatud arvutamine

Jrk. nr.	x_i	f_i	x_i-a ($a=320$)	$\frac{x_i-a}{k}$ ($k=20$)	$\frac{f_i}{h}$ ($h=500$)	$\frac{(x_i-a)}{k}\frac{f_i}{h}$
1.	240	1000	—80	—4	2	—8
2.	260	1500	—60	—3	3	—9
3.	280	2000	—40	—2	4	—8
4.	300	2500	—20	—1	5	—5
5.	320	3000	0	60	6	0
6.	340	2000	20	1	4	4
7.	360	1500	40	2	3	6
8.	380	1000	60	3	2	6
9.	400	500	80	4	1	4
Kokku	×	15 000	×	×	30	—10

$$\bar{x}=\frac{\Sigma\left(\frac{x_i-a}{k}\right)\frac{f_i}{h}}{\Sigma\frac{f}{h}}\cdot k+a.$$

Tegurite suurendamisel omandab valem järgmise kuju:

$$\bar{x}=\frac{\Sigma(x_i+a)kf_ih}{\Sigma f_ih}:k-a.$$

Arvutamise lihtsustamiseks võib ühte omadust kasutada teguri suurendamiseks, teist aga vähendamiseks. Seejuures tuleb aga õigesti muuta valemi kuju.

Aritmeetilise keskmise lihtsustatud arvutamise näide on toodud tabelis 3.2. Antud näites on meelevaldselt valitud arvuks a võetud üks variantide väärtusi rea keskelt. See võimaldab vältida korrutamist kõige suurema kaaluga (reas 5) ja vähendada korrutiste summat negatiivsete väärtuste tekitamisega (veerus 7).

$$\bar{x}=\frac{\Sigma\left(\frac{x_i-a}{k}\right)\frac{f_i}{h}}{\Sigma\frac{f_i}{h}}\cdot k+a=\frac{-10}{30}\cdot 20+320=$$

$$=\frac{-200}{30}+320=-6{,}7+320=313{,}3.$$

3.1.2. Aritmeetilise keskmise arvutamine struktuurisuhtarvude alusel

Aritmeetilist keskmist saab leida ka variantide individuaalväärtuste ja nende osatähtsuste korrutiste liitmise teel:

Tabel 3.3

Turul müüdud kurkide hinnad ja kogused ning keskmise hinna arvutused

Hind (kop.) x_i	Kogus (kg) f_i	Hinnarühma osatähtsus ψ_i	$x_i\psi_i$	x_if_i
1	2	3	4	5
10	2000	0,10	1,0	20 000
15	8000	0,40	6,0	120 000
20	4000	0,20	4,0	80 000
25	4000	0,20	5,0	100 000
30	2000	0,10	3,0	60 000
Kokku	20 000	1,00	19,0	380 000

$\bar{x}=\Sigma x_i\psi_i$,

kus ψ_i on vastava variandi esinemise osatähtsus väheta suhtena $\psi_i=\frac{f_i}{\Sigma f_i}$.

Kui variandi esinemise osatähtsus (ψ_i) on antud protsentides, siis tuleb aritmeetilise keskmise leidmisel korrutiste summa $\Sigma x_i\psi_i$ jagada sajaga või eelnevalt kõik osatähtsused jagada sajaga.

Eeltoodud valemi selgituseks võib esitada järgmised teisendused:

$$\bar{x}=\frac{\Sigma x_if_i}{\Sigma f_i}=\Sigma\left(x_i\frac{f}{\Sigma f_i}\right)=\Sigma x_i\psi_i.$$

Selle arvutamisvõtte tundmine soodustab struktuurinihete uurimist indeksimeetodil.

Arvnäide on toodud tabelis 3.3. Keskmise hinna leidmiseks piisab veergude 1 ja 3 andmetest.

Neljandas veerus toodud korrutiste summa ongi aritmeetiline keskmine. Andmed koguste kohta

võimaldavad leida aritmeetilise keskmise ka tavalise valemiga.

$$\bar{x}=\frac{380\,000}{20\,000}=19.$$

3.1.3. Intervallitud variatsioonrea aritmeetiline keskmine

Intervallitud variatsioonrea andmete alusel saab tavaliselt arvutada ainult ligikaudse aritmeetilise keskmise, kui ei ole andmeid variantide jagunemise kohta igas intervallis. Vahemikena antud variantide väärtused asendatakse intervallikeskmistega, mis leitakse intevallirajade aritmeetiliste keskmistena, kusjuures enamasti eeldatakse, et tegemist on pidevalt varieeruva nähtusega. Edasi leitakse aritmeetiline keskmine nii nagu tavalise variatsioonrea puhul.

Täiendavaid raskusi tekib aritmeetilise keskmise arvutamisel lahtiste äärerühmadega intervallitud variatsioonrea korral. Lahtise äärerühma kohta teame vaid intervalli üla- või alapiiri.

Tabel 3.4

Detailide kaalu intervallitud variatsioonrea teisendamine sõredaks reaks

Kaal (g)	Detailide arv	Intervalli keskmine
kuni 250	1000	240
250—270	1500	260
270—290	2000	280
290—310	2500	300
310—330	3000	320
330—350	2000	340
350—370	1500	360
370—390	1000	380
üle 390	500	400

Tavaliselt valitakse lahtise äärerühma intervalli piiriks temale järgneva või eelneva intervalli piirina. See on lubatav siis, kui lahtise äärerühma osatähtsus üldkogumis on väike ning selline variantide jaotumine äärerühmas on loogiliselt eeldatav.

Tabelis 3.4 on toodud näide intervallitud variatsioonrea muutmise kohta tavaliseks sõredaks variatsioonreaks. Edasi toimub aritmeetilise keskmise arvutamine nii nagu tabelis 3.2 toodud näite korral.

3.1.4. Aritmeetilise keskmise arvutamine momentide meetodil

Momentide meetodil (vt. ka jaot. 5.2) leitakse aritmeetiline keskmine esimest järku tingmomendi ja selle leidmisel valitud tingliku suuruse summana. Valemina võib seda väljendada järgmiselt:

$$\bar{x}=\eta_1+a,$$

kus η_1 on esimest järku tingmoment;

a — tingmomendi arvutamisel kasutatud tinglik suurus.

Esimest järku tingmoment leitakse valemiga:

$$\eta_1=\frac{\Sigma\,(x_i-a)f_i}{\Sigma f_i}.$$

Järelikult võib aritmeetilise keskmise leida valemiga

$$\bar{x}=\frac{\Sigma\,(x_i-a)f_i}{\Sigma f_i}+a.$$

Viimasest valemist on selgesti näha, et momentide meetodi rakendamine aritmeetilise keskmise arvutamisel tugineb ühele aritmeetilise keskmise omadusele (vt. jaot. 3.1.1).

Momentide meetodi kasutamine aritmeetilise keskmise arvutamisel osutub eriti otstarbekaks siis, kui on vaja leida ka dispersioon, kusjuures see leitakse momentide meetodil.

3.2. HARMOONILINE KESKMINE

Harmooniline keskmine leitakse lihtsa statistilise rea andmete alusel valemiga:

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}},$$

kus n on rea liikmete arv;
x_i — rea liikmed (variandid).

Variatsioonrea puhul tuleb leida kaalutud harmooniline keskmine, mille valem on:

$$\bar{x}_h = \frac{\sum f_i}{\sum \frac{1}{x_i} f_i},$$

kus f_i on variantide esinemissagedused.

Tabel 3.5

Keskmise saagikuse arvutamine harmoonilise keskmise valemi järgi

Jrk. nr.	Saagikus (ts/h) x_i	Saak (ts) f_i	$\frac{f_i}{x_i}$
1	27	270	10
2	28	1520	40
3	29	5800	200
4	30	9000	300
5	31	12400	400
6	32	960	30
7	33	660	20
Kokku	×	30610	1000

Variandi individuaalväärtuse (x_i) pöördväärtust $\left(\frac{1}{x_i}\right)$ tavaliselt ei leita ning kaalutud harmoonilise keskmise valemit rakendatakse järgmisel kujul:

$$\bar{x}_h = \frac{\sum f_i}{\sum \frac{f_i}{x_i}}.$$

Harmoonilise keskmise arvutamist selgitab tabelis 3.5 toodud arvnäide.

$$\bar{x}_h = \frac{\sum f_i}{\sum \frac{f_i}{x_i}} = \frac{30\,610}{1000} = 30{,}61.$$

3.3. ARITMEETILINE VÕI HARMOONILINE KESKMINE

Aritmeetilist ja harmoonilist keskmist saab arvutada samade arvandmete alusel. Seetõttu tekib arvutajal sageli kasutamiseks sobiva keskmise valiku küsimus, mille lahendamiseks võib kasutada järgmist kolmest sammust koosnevat arutlusskeemi:

«1. samm. Tehakse kindlaks, missugune suurus on variant ja missugune kaal. Variandiks on ikka see, mille keskmist otsitakse...

2. samm. Leitakse mingi kolmas suurus, mille kaudu kaal ja variant on omavahel seotud ning avaldatakse need võrrandina nii, et variant on avaldise ühel, kaal koos neid ühendava suurusega teisel poolel...

Saadud valemit nimetatakse seosvalemiks.

3. samm. Valitakse sobiv keskmine, olenevalt

sellest, mida kasutatakse kaaluna. Kui kaal võetakse seosvalemi murrulise osa lugejast, tuleb arvutada harmooniline, kui nimetajast, siis aritmeetiline keskmine...

Sama reegli võib sõnastada ka teisiti: kui otsitav keskmine suurus on kaaludest võrdelises olenevuses, tuleb arvutada harmooniline, kui pöördvõrdelises, siis aritmeetiline keskmine.» [2]

3.4. ASTMEKESKMISED

Astmekeskmised leitakse aritmeetilise keskmise valemiga sarnase valemi järgi, kusjuures variandid tõstetakse ruutu, kuupi või mõnesse suuremasse astmesse ning lõpptulemuse leidmisel võetakse sama astme juur.

Astmekeskmise üldvalem on lihtsa statistilise rea puhul:

$$\bar{x}_k = \sqrt[k]{\frac{\Sigma x_i^k}{n}},$$

kus $\bar{x}_k$ on k astme keskmine;
x_i — rea liikmete väärtused;
n — rea liikmete arv.

Variatsioonrea puhul on astmekeskmise valem järgmise kujuga:

$$\bar{x}_k = \sqrt[k]{\frac{\Sigma x_i^k f_i}{\Sigma f_i}},$$

kus f_i on variantide esinemissagedused.

Ruutkeskmise valem on lihtsa statistilise rea puhul:

$$\bar{x}_2 = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n}}.$$

Variatsioonrea andmete töötlemisel on ruutkeskmise valem järgmise kujuga:

$$\bar{x}_2 = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2 f_i}{\Sigma f_i}}.$$

Teiste astmekeskmiste valemid on analoogilised, erinevus on vaid astmes. Nii näiteks on variatsioonrea kuupkeskmise valem järgmine:

$$\bar{x}_3 = \sqrt[3]{\frac{\Sigma x_i^3 f_i}{\Sigma f_i}}.$$

Ka astmekeskmiste arvutamisel võib osutuda kasulikuks mõnede keskmiste omaduste tundmine.

Kui vähendada (suurendada) variante mingi meelevaldne arv k korda, siis väheneb (suureneb) astmekeskmine sama arv k astmekeskmisele vastavas astmes korda. Ruutkeskmise puhul seega k^2 korda.

Kui vähendada (suurendada) variantide esinemissagedusi mingi meelevaldne arv h korda, siis astmekeskmine ei muutu.

3.5. KRONOLOOGILINE KESKMINE

Kronoloogilist keskmist kasutatakse enam kui kahe liikmega momentridade puhul, kuna siin ei saa kasutada lihtsat aritmeetilist keskmist,

mida kasutatakse perioodridade puhul. Kahe liikmega momentrea puhul saab kasutada aritmeetilist keskmist. Kronoloogiline keskmine ongi tuletatud reast paarismomentide aritmeetiliste keskmiste aritmeetilisest keskmisest. Nii saadakse momente iseloomustavatest karakteristikutest pikemat perioodi iseloomustav karakteristik. Kronoloogilise keskmise valem on:

$$\bar{x}_{kr}=\frac{\frac{x_1}{2}+x_2+\ldots+x_{n-1}+\frac{x_n}{2}}{n-1},$$

kus $x_i, \ldots, x_n$ on momentrea elementide väärtused;
n — momentrea elementide arv.

Kronoloogilise keskmise arvutamist selgitab tabelis 8.8 toodud arvnäide.

3.6. GEOMEETRILINE KESKMINE

Mõnede majanduslike nähtuste hindamisel osutub vajalikuks geomeetrilise keskmise arvutamine. Eriti sagedasti läheb geomeetrilist keskmist vaja majanduslike nähtuste ajalise muutumise iseloomustamisel keskmise kasvutempo arvutamiseks.

Geomeetrilise keskmise valem on:

$$\bar{x}_g=\sqrt[n]{\Pi x_i},$$

kus x_i on rea liikmete väärtused;
n — rea liikmete arv.

Kuna korrutise märk Π on suhteliselt vähetuntud, siis avaldatakse geomeetrilise keskmise valem enamasti järgmisel kujul:

$$\bar{x}_g=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\ldots x_n}.$$

Kaalutud geomeetrilise keskmise valemis esinevad variantide kaalud f_i astendajatena. Kaalude summa aga esineb juurijana.

$$\bar{x}_g=\sqrt[\Sigma f_i]{\Pi x_i^{f_i}}=\sqrt[\Sigma f_i]{x_1^{f_1}\cdot x_2^{f_2}\ldots x_n^{f_n}}.$$

Enam kui kolme liikmega rea puhul on geomeetrilise keskmise leidmine juurimise teel küllaltki tülikas. Seetõttu kasutatakse arvutamisel logaritme. Seoses sellega avaldatakse ka geomeetrilise keskmise valem sageli logaritmitud kujul ning leitavat keskmist nimetatakse logaritmkeskmiseks:

$$\log \bar{x}_g=\frac{1}{n}\log \Pi x_i=\frac{1}{n}\Sigma \log x_i.$$

Kaalutud logaritmkeskmise valem on vastavalt järgmise kujuga:

$$\log \bar{x}_g=\frac{1}{\Sigma f_i}\Sigma f_i \log x_i.$$

Keskmise kasvutempo võib arvutada ahelkasvutempode geomeetrilise või logaritmkeskmisena. Enamasti aga kasutatakse selleks eri valemit, milles on arvesse võetud, et ahelkasvutempode korrutis annab viimase aluskasvutempo, mis omakorda on aegrea viimase liikme väärtuse suhe aegrea esimese liikme väärtusesse. Vastav valem avaldatakse järgmisel kujul:

$$\bar{T}=\sqrt[t-1]{\frac{y_t}{y_1}},$$

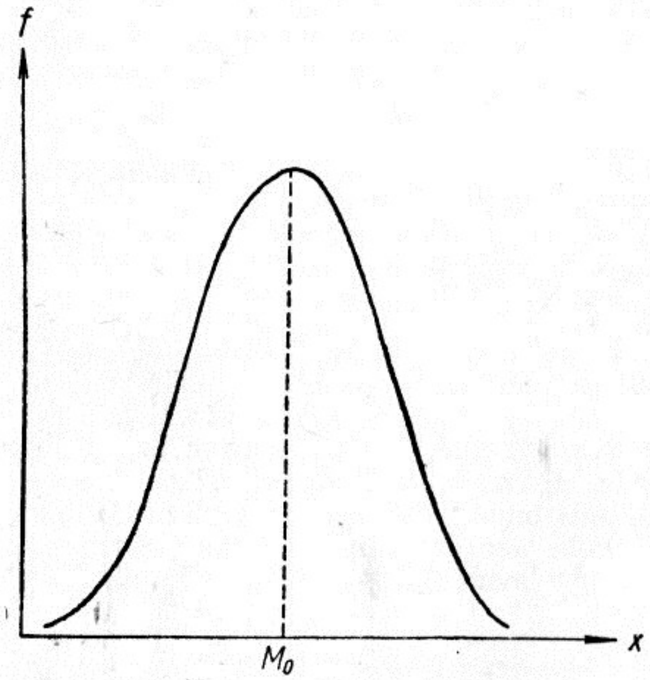
kus $\bar{i}$ on keskmine kasvutempo,
y_1 — aegrea esimese liikme väärtus,
y_t — aegrea viimase liikme väärtus,
t — aegrea liikmete arv.

Keskmise kasvutempo arvutamist on selgitatud aegridade käsitlemisel (vt. jaot. 8.2).

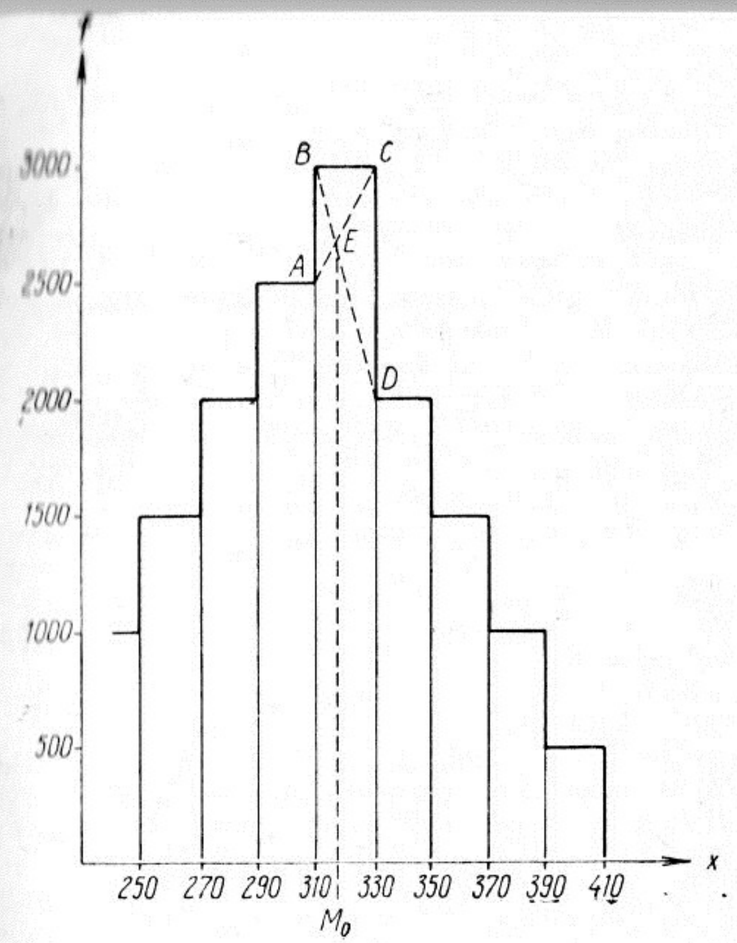
3.7. MOOD

Moodiks nimetatakse statistilise rea kõige sagedamini esinevat väärtust. Moodi nimetatakse ka dominandiks. Mood vastab jaotuskõvera maksimumile (vt. joon. 3.1).

Tavalisest variatsioonreast on moodi leida väga



3 1. Mood



3.2. Moodi leidmine graafiliselt

lihtne. Keerulisem on moodi leidmine intervalliitud variatsioonrea andmeil. Selleks kasutatakse järgmist valemit:

$$Mo = x_{mo} + \frac{k(f_{mo} - f_{mo-1})}{(f_{mo} - f_{mo-1}) + (f_{mo} - f_{mo+1})},$$

kus x_{mo} on moodintervalli alapiir;

k — moodintervalli pikkus;
f_{mo} — moodintervalli sagedus;
f_{mo-1} — moodintervallile eelneva intervalli sagedus;
f_{mo+1} — moodintervallile järgneva intervalli sagedus.

Moodi leidmist iseloomustab tabelis 3.4 toodud arvandmete alusel tehtud arvutus:

$$Mo = 310 + \frac{20(3000-2500)}{(3000-2500)+(3000-2000)} =$$

$$= 310 + \frac{20(6-5)}{(6-5)+(6-4)} = 310 + 6{,}67 =$$

$$= 316{,}67.$$

Siin osutus arvutamisel otstarbekaks jagada sagedused vabalt valitud suurusega h, mis käesoleval juhul oli 500.

Samadel andmetel arvutatud detailide keskmine kaal aritmeetilise keskmisena oli 313,3.

Moodi võib leida ka graafiliselt. Selleks tuleb joonistada variatsioonrea andmetel terve histogramm või selle osa kolme intervalliga (moodintervall ning sellele eelnev ja järgnev intervall). Tabel 3.4 andmetel joonistatud histogramm on toodud joonisel 3.2. Moodintervalli histogrammi tulba tipud B ja C ühendatakse diagonaalsirgete abil eelmise ja järgmise histogrammitulba tippudega A ja D. Diagonaalide lõikumispunkti E abstsiss annab moodi väärtuse.

Tavalise variatsioonrea puhul oleneb moodi väärtus ainult suurimast sagedusest. Võrdsete sageduste puhul võib olla ka kaks moodi. Intervallitud variatsioonrea puhul mõjustab moodi väärtust moodintervalli sageduse kõrval ka naaberintervallide sagedus.

3.8. MEDIAAN

Mediaan on korrastatud statistilise rea keskmine liige, millest mõlemale poole jääb võrdne arv liikmeid. Mediaani nimetatakse sageli statistilise rea keskliikmeks.

Kui reas on paarisarv liikmeid, siis ei saa üks rea liige olla mediaan. Viimane tuleb leida rea keskele jääva kahe liikme aritmeetilise keskmisena.

Sümmeetrilises variatsioonreas on mediaan ja aritmeetiline keskmine võrdsed. Graafiliselt võib mediaani kujutada kui variatsioonkõvera alust pindala poolitava vertikaaljoone abstsissi (vt. joon. 3.3).

Tavalise sõreda variatsioonrea mediaan leitakse mediaani järjekorranumbri järgi. Viimane leitakse valemiga:

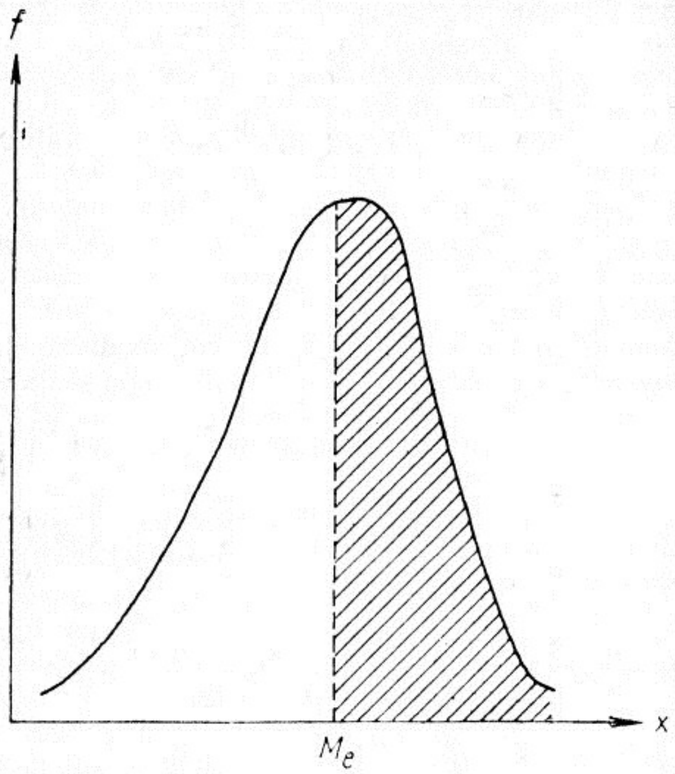
$$m = \frac{\Sigma f_i + 1}{2},$$

kus f_i on variantide esinemise sagedused.

Suure sageduste summa korral võib summa $\Sigma f_i + 1$ asendada lihtsalt sageduste summaga Σf_i.

Järjekorranumbrile vastava variandi leidmiseks tuleb leida sageduste järgsummad kuni esimese mediaani järjekorranumbrist suurema järgsummani. Viimasele liidetavale sagedusele vastav variandi väärtus ongi mediaan. Samuti leitakse ka mediaanintervall. Seda selgitab allpool toodud näide.

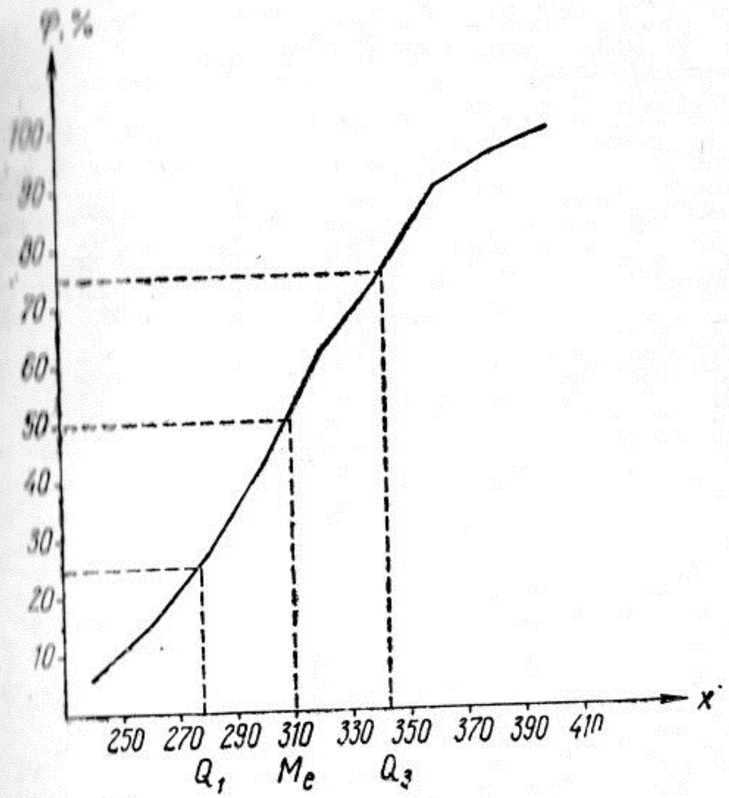
Intervallitud variatsioonrea andmetel leitakse mediaan valemiga:



3.3. Mediaan

$$Me = x_{me} + \frac{k\left(\frac{\Sigma f_i + 1}{2} - \omega\right)}{f_{me}},$$

kus x_{me} on mediaanintervalli alapiir;
k — mediaanintervalli pikkus;
ω — mediaanintervallile eelnevate intervallide sageduste summa;
f_{me} — mediaanintervalli sagedus;
f_i — intervallide sagedused.



3.4. Mediaani ja kvartiilide leidmine graafiliselt

Mediaani on võimalik leida ka suhteliste sageduste järgsummade kõvera abil, kuid see eeldab struktuurisuhtarvude arvutamist.

Mediaani arvutamist iseloomustab tabeli 3.4 andmetel tabelis 3.6 toodud arvnäide ja graafilist leidmist samadel andmetel joonis 3.4.

$$m = \frac{\Sigma f}{2} = \frac{15\,000}{2} = 7500;$$

Tabel 3.6

Detailide keskmise kaalu leidmine mediaanina

Detailide kaal (g)	Detailide arv	Detailide arvu järgsummad
kuni 250	1000	1000
250—270	1500	2500
270—290	2000	4500
290—310	2500	7000
310—330	3000	10 000
330—350	2000	
350—370	2500	
370—390	1000	
üle 390	500	
Kokku	15 000	×

$$Me = x_{me} + \frac{k\left(\frac{\Sigma f}{2} - \omega\right)}{f_{me}} =$$

$$= 310 + \frac{20(7500-7000)}{3000} = 310 + 3{,}33 = 313{,}33.$$

3.9. KVARTIILID

Kvartiilid on korrastatud statistilise rea liikmed, mis jagavad selle rea neljaks võrdse liikmete arvuga osaks. Kvartiile on kolm. Neid nimetatakse vastavalt esimeseks (Q_1), teiseks (Q_2) ja kolmandaks (Q_3) kvartiiliks. Teine kvartiil on võrdne mediaaniga.

Sõreda statistilise variatsioonrea kvartiilid tuleb leida kvartiilide järjekorranumbrite ja järgsummade võrdlemise teel, analoogiliselt mediaani leidmisele (vt. jaot. 3.8). Kvartiilide järjekorranumbrid leitakse järgmiste valemitega:

$$m_{Q_1} = \frac{\Sigma f_i + 1}{4}; \quad m_{Q_2} = \frac{\Sigma f_i + 1}{2}; \quad m_{Q_3} = \frac{3(\Sigma f_i + 1)}{4}.$$

Kuna teine kvartiil on võrdne mediaaniga, siis ei ole ka intervallitud variatsioonrea teise kvartiili leidmiseks eri valemit vaja. Esimese ja kolmanda kvartiili valemid on oma kujult samuti lähedased mediaani valemile, sest nad on vastavalt mediaanid rea esimesest ja teisest poolest. Valemid on järgmised:

$$Q_1 = x_{Q_1} + \frac{k\left(\frac{\Sigma f_i + 1}{4} - \omega_{Q_1}\right)}{f_{Q_1}}$$

ja

$$Q_3 = x_{Q_3} + \frac{k\left[\frac{3(\Sigma f_i + 1)}{4} - \omega_{Q_3}\right]}{f_{Q_3}},$$

kus x_{Q_1} on esimese kvartiilintervalli alapiir;
x_{Q_3} — kolmanda kvartiilintervalli alapiir;
k — intervalli pikkus;
f_i — intervallide sagedused;
f_{Q_1} — esimese kvartiilintervalli sagedus;
f_{Q_3} — kolmanda kvartiilintervalli sagedus;
ω_{Q_1} — esimesele kvartiilintervallile eelnevate intervallide sageduste summa;
ω_{Q_3} — kolmandale kvartiilintervallile eelnevate sageduste summa.

Kvartiilide graafilist leidmist on iseloomustatud joonisel 3.4. See toimub analoogiliselt mediaani leidmisele. Esimene kvartiil vastab 25. protsendile osamäärast, kolmas 75. protsendile osamäärast.

3.10. DETSIILID

Detsiilid on korrastatud statistilise rea liikmed, mis jagavad selle rea kümneks võrdse liikmete arvuga osaks.

Detsiile on üheksa. Neid tähistatakse vastavalt D_1, D_2, ..., D_9. Viies detsiil on võrdne mediaaniga. Detsiilid leitakse analoogiliselt kvartiilidele. Neid kasutatakse harva.

3.11. TSENTIILID

Tsentiilid on korrastatud statistilise rea liikmed, mis jagavad selle rea sajaks võrdse liikmete arvuga osaks. Neid nimetatakse ka pertsentiilideks ja protsentiilideks. Tähistatakse vastavalt T_1, T_2, ..., T_{99}. Tsentiile on üheksakümmend üheksa.

Viiekümnes tsentiil vastab mediaanile, teisele kvartiilile ning viiendale detsiilile.

Tsentiile kasutati seni statistilistes arvutustes väga harva, sest nende arvutuslik leidmine on aeganõudev. Nüüd on koostatud programmid tsentiilide leidmiseks raalil ning neid kasutatakse variatsioonridade iseloomustamisel järjest rohkem.

IV VARIATSIOONINÄITARVUD

Variatsiooninäitarvud täiendavad keskmisi. Keskmised annavad vaadeldavast nähtusest vaid kõige üldisema ettekujutuse, nad ei kajasta variantide omavahelisi erisusi. Võrdsed aritmeetilised keskmised võivad olla vägagi erinevatel ridadel. Variatsiooninäitarvud iseloomustavad variantide erisusi, nende varieerumist. [9]

Peamised variatsiooninäitarvud on:

1) variatsiooniulatus;
2) keskmine lineaarhälve;
3) dispersioon;
4) standardhälve;
5) variatsioonikoefitsiendid.

Peamiste variatsiooninäitarvude kõrval kasutatakse veel mitmesuguseid muid variatsiooninäitarve (*F. Galtoni* kvartiilhälve, *A. Bowle'i* diferentseerumiskoefitsient jne.).

4.1. VARIATSIOONIULATUS

Variatsiooniulatus ehk variatsiooniamplituud on statistilise rea kõige suurema ja väikseima liikme väärtuse vahe.

$$R = x_{max} - x_{min},$$

kus R on variatsiooniulatus;

x_{max} — rea kõige suurema liikme väärtus;

x_{min} — rea kõige väiksema liikme väärtus.

Variatsiooniulatus on äärmiselt elementaarne varieerumise näitaja, kuid annab siiski teatava ettekujutuse varieerumisest. Variatsiooniulatus on arvutatud jaot. 4.6 toodud arvnäites.

Variatsiooniulatuse ja aritmeetilise keskmise suhtena leitakse variatsioonikoefitsient, mis annab varieerumise suhtelise iseloomustuse (vt. jaot. 4.5).

4.2. KESKMINE LINEAARHÄLVE

Keskmine lineaarhälve on variantide individuaalväärtuste ja nende aritmeetilise keskmise vaheliste hälvete absoluutväärtuste aritmeetiline keskmine.

Keskmise lineaarhälbe valem on:

a) lihtsa statistilise rea puhul

$$\bar{d}=\frac{\Sigma|x_i-\bar{x}|}{n}$$

ja b) statistilise variatsioonrea puhul

$$\bar{d}=\frac{\Sigma|x_i-\bar{x}|f_i}{\Sigma f_i},$$

kus x_i on variantide individuaalväärtused;
$\bar{x}$ — rea aritmeetiline keskmine;
f_i — variantide esinemissagedused.

Kui variatsiooniulatus oleneb vaid rea ekstreemsetest väärtustest, siis keskmise lineaarhälbe väärtus sõltub kõigi variantide individuaalväärtustest, mistõttu ta annab täpsema ettekujutuse varieerumisest (vt. jaot. 4.6).

Varieerumise suhtelist suurust näitab keskmise lineaarhälbe ja aritmeetilise keskmise suhtena leitud variatsioonikoefitsient (vt. jaot. 4.5).

4.3. DISPERSIOON

Dispersioon on variantide individuaalväärtuste ja nende aritmeetilise keskmise vaheliste hälvete ruutude aritmeetiline keskmine.

Dispersiooni valem on:

a) lihtsa statistilise rea puhul

$$\sigma^2=\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n}$$

ja

b) statistilise variatsioonrea puhul

$$\sigma^2=\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2f_i}{\Sigma f_i}$$

kus x_i on variantide individuaalväärtused;
$\bar{x}$ — rea aritmeetiline keskmine;
f_i — variantide esinemissagedused.

Dispersioon on üks enamkasutatavam variatsiooninäitarv, kuna teda saab hästi kasutada tõenäosusteooria rakendamisel. Dispersioon on arvutatud jaot. 4.6 toodud arvnäites.

Variatsioonikoefitsienti dispersiooni ja aritmeetilise keskmise suhtena ei leita, sest dispersiooni mõõtühikuks on variandi mõõtühiku ruut.

Varieerumise suhteliseks hindamiseks kasutatakse standardhälbe ja aritmeetilise keskmise suhtena leitavat variatsioonikoefitsienti (vt. jaot. 4.4 ja 4.5).

4.3.1. Dispersiooni arvutamist lihtsustavad omadused

Dispersiooni arvutamine variantide individuaalväärtuste ja nende aritmeetilise keskmise vaheliste hälvete ruutude aritmeetilise keskmisena on enamasti küllaltki vaevarikas. Arvutamist saab

lihtsustada, tuginedes mõnedele dispersiooni omadustele või momentide omavahelistele seostele.

Dispersiooni arvutamist lihtsustavad järgmised dispersiooni omadused.

1. Kui vähendada või suurendada variante mingi meelevaldse arvu a võrra, siis dispersioon ei muutu.

Selle omaduse alusel võime arvutamise lihtsustamiseks kõikidest variantidest lahutada või neile liita mingi meelevaldse arvu, mis muudab variandid sellisteks, et neist oleks lihtsam leida aritmeetiline keskmine ja hälbed keskmise suhtes. Seejuures tuleb silmas pidada, et aritmeetiline keskmine muutub sama arvu võrra (vt. jaot. 3.1.1). Hälbed leitakse arvutusliku, mitte tegeliku keskmise suhtes. Dispersiooni valemis võib selle omaduse rakendamist variantide vähendamisega väljendada järgmiselt:

a) lihtsa statistilise rea puhul

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma[(x_i - a) - (\bar{x} - a)]^2}{n}$$

ja

b) statistilise variatsioonrea puhul

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma[(x_i - a) - (\bar{x} - a)]^2 f_i}{\Sigma f_i}.$$

2. Kui vähendada (suurendada) variante või hälbeid mingi meelevaldne arv k korda, siis väheneb (suureneb) dispersioon k^2 korda.

Selle omaduse rakendamisel hälvete vähendamisega k korda saame järgmise dispersiooni valemi:

a) lihtsa statistilise rea puhul

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma\left(\frac{x_i - \bar{x}}{k}\right)^2}{n} k^2$$

ja

b) statistilise variatsioonrea puhul

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma\left(\frac{x_i - \bar{x}}{k}\right)^2 f_i}{\Sigma f_i} k^2.$$

Juhul kui seda omadust rakendada (variantide vähendamisega k korda) enne keskmise arvutamist, siis tuleb silmas pidada, et keskmine väheneb seejuures samuti k korda.

3. Kui vähendada (suurendada) variantide kaalusid ehk esinemissagedusi mingi meelevaldne arv h korda, siis dispersioon ei muutu.

Selle omaduse rakendamisel kaalude vähendamisega saame järgmise dispersiooni valemi:

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 \frac{f_i}{h}}{\Sigma \frac{f_i}{h}}.$$

Võimaluse korral rakendatakse kõiki eeltoodud dispersiooni omadusi üheaegselt. Variantide ja sageduste vähendamisel omandab dispersiooni valem siis järgmise kuju:

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma\left(\frac{x_i - a}{k} - \frac{\bar{x} - a}{k}\right)^2 \frac{f_i}{h}}{\Sigma \frac{f_i}{h}} k^2.$$

Seejuures suurus $\frac{\bar{x}-a}{k}$ saadakse üldise lahenduse käigus ning aritmeetilist keskmist ei ole vaja eraldi arvutada (vt. jaot. 4.6).

Dispersiooni leidmise kõige lihtsamaks viisiks võib siiski lugeda momentide meetodi rakendamist (vt. jaot. 5.2), mis tugineb seosele

$$\mu_2=\eta_2-\eta_1^2,$$

kus μ_2 on teist järku keskmoment, ühtlasi dispersioon;
η_1 — esimest järku tingmoment;
η_2 — teist järku tingmoment.

4.3.2. Alternatiivse tunnuse dispersioon

Alternatiivse tunnuse dispersioon on vastaval tunnust omavate kogumiliikmete osatähtsuse ning teist tunnust omavate kogumiliikmete osatähtsuse korrutis. Valem on

$$\sigma^2=pq,$$

kus p on teatava alternatiivse tunnusega kogumiliikmete osatähtsus (osamäär) vahetu suhtena;
q — teise alternatiivse tunnusega kogumiliikmete osatähtsus.

Kuna $q=1-p$, siis võib alternatiivse tunnuse dispersiooni valemi kirjutada ka järgmiselt:

$$\sigma^2=p(1-p).$$

Alternatiivse tunnuse dispersioon võib muutuda vahemikus 0...0,25. Null on ta siis, kui uuritav tunnus ei varieeru, ning 0,25 siis, kui varieerumine on maksimaalne ($p=0{,}5$ ja $q=0{,}5$).

4.3.3. Dispersioonide liitmise lause

Dispersioonide liitmise lauseks nimetatakse järgmise seose väljendust: üld dispersioon on võrdne rühmdispersioonide keskmise ja rühmadevahelise dispersioonisummaga. Valemina võib seda kirjutada järgmiselt:

$$\sigma^2=\overline{\sigma_i^2}+\delta^2,$$

kus σ^2 on üldispersioon;
$\overline{\sigma_i^2}$ — rühmdispersioonide keskmine;
δ^2 — rühmadevaheline dispersioon.

Dispersioonide liitmise lause on rakendatav osakogumiteks jaotatud kogumite puhul. Igas osakogumis leitakse variantide aritmeetiline keskmine ja dispersioon. Osakogumite dispersioonide (rühmdispersioonide) keskmine leitakse saalutud aritmeetilise keskmise valemiga:

$$\overline{\sigma_i^2}=\frac{\Sigma\sigma_i^2 f_i}{\Sigma f_i},$$

kus σ_i^2 on osakogumi dispersioon (rühmdispersioon);
f_i — osakogumi liikmete arv.

Rühmadevaheline dispersioon leitakse valemiga:

$$\delta^2=\frac{\Sigma(\bar{x}_i-\bar{x})^2 f_i}{\Sigma f_i},$$

kus $\bar{x}_i$ on osakogumi (rühma) keskmine,
$\bar{x}$ — üldkogumi keskmine.

Rühmadevaheline dispersioon iseloomustab osa-

kogumite keskmiste hälbimist üldkeskmisest, s. t. ta on rühmkeskmiste dispersioon üldkeskmisest.

Dipersioonide liitmise lausele tugineb suurel määral dispersioonanalüüs. Selle tundmine on oluline ka väljavõttelise vaatluse juures.

4.4. STANDARDHÄLVE

Standardhälve on variantide individuaalväärtuste ja nende aritmeetilise keskmise vaheliste hälvete ruutkeskmine.

Standardhälbe valem on:

a) lihtsa statistilise rea puhul

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{n}},$$

b) statistilise variatsioonrea puhul

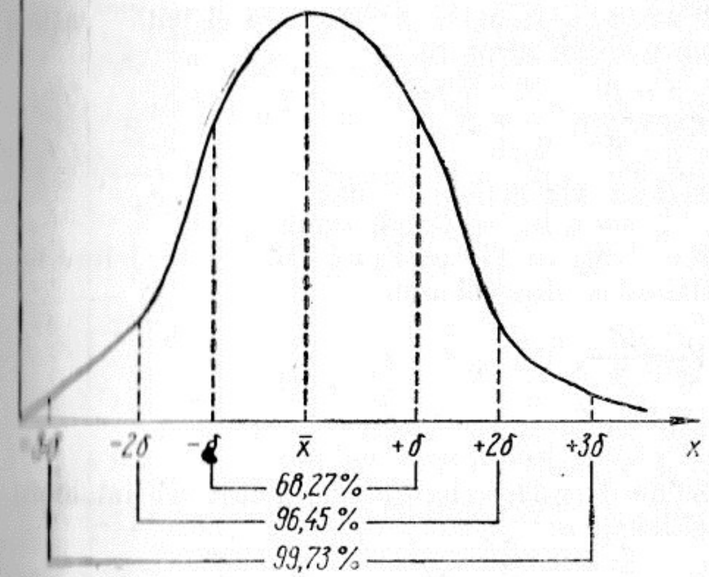
$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\Sigma f_i}},$$

kus x_i on variantide individuaalväärtused;
$\bar{x}$ — rea aritmeetiline keskmine;
f_i — variantide esinemissagedused.

Ruutjuure alla jääv avaldis on variantide individuaalväärtuste ja nende aritmeetilise keskmise vaheliste hälvete ruutude aritmeetiline keskmine, seega dispersioon. Järelikult saab standardhälbe leida ruutjuurena dispersioonist:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}.$$

Standardhälve on nii nagu dispersioongi hästi seostatav tõenäosusteooriaga. Normaaljaotuse korral on standardhälbe väärtus määratud normaaljaotuskõvera (*Gaussi-Laplace*'i kõver) käänupunktidega. Vahemik $\bar{x} \pm \sigma$ hõlmab 68,27 protsenti, vahemik $\bar{x} \pm 2\sigma$ 95,45 protsenti ning vahemik $\bar{x} \pm 3\sigma$ 99,73 protsenti jaotuskõveraalusest pindalast. Graafiliselt võib standardhälvet esitada jaotuskõvera käänupunkti abstsissina (vt. joonis 4.1).



4.1. Normaaljaotuskõvera standardhälbe graafiline kujutamine

Standardhälbe ja aritmeetilise keskmise suhtena leitakse üks enamkasutatavaid variatsioonikoefitsiente (vt. jaot. 4.5).

4.5. VARIATSIOONIKOEFITSIENDID

Variatsioonikoefitsiendid leitakse absoluutsete variatsioonnäitarvude (variatsiooniulatus, keskmine lineaarhälve ja standardhälve) ning aritmeetilise keskmise suhtena.

Variatsiooniulatuse alusel leitav variatsioonikoefitsient on seega:

$$V_R = \frac{R}{\bar{x}},$$

kus R on variatsiooniulatus;
$\bar{x}$ — aritmeetiline keskmine.

Keskmise lineaarhälbe alusel leitav variatsioonikoefitsient on:

$$V_{\bar{d}} = \frac{\bar{d}}{\bar{x}},$$

kus $\bar{d}$ on keskmine lineaarhälve;
$\bar{x}$ — aritmeetiline keskmine.

Standardhälbe alusel leitav variatsioonikoefitsient on:

$$V_\sigma = \frac{\sigma}{\bar{x}},$$

kus σ on standardhälve;
$\bar{x}$ — aritmeetiline keskmine.

4.6. VARIATSIOONINÄITARVUDE ARVUTAMINE

Variatsiooninäitarvude arvutamiseks vajaminevad lähteandmed on toodud tabelis 4.1 veergudes 2 ja 3. Järgmistes tabeli 4.1 veergudes on variatsiooninäitarvude arvutamiseks vajalikud vahearvutused.

Variatsioonitunnuse arvutamine näide

Jrk. nr.	x_i	f_i	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$\frac{f_i}{n}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert \frac{f_i}{n}$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \frac{f_i}{n}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	240	1000	73	2	146	−73	5329	10658
2	260	1500	53	3	159	−53	2809	8427
3	280	2000	33	4	132	−33	1089	4356
4	300	2500	13	5	65	−13	169	845
5	320	3000	7	6	42	7	49	294
6	340	2000	27	4	108	27	729	2916
7	360	1500	47	3	141	47	2209	6627
8	380	1000	67	2	134	67	4489	8978
9	400	500	87	1	87	87	7569	7569
Kokku	×	15000	×	30	1014	×	×	50670

Variatsiooniulatuse leidmiseks ei ole tabelis arvutusi vaja teha. See leitakse järgmiselt:

$$R = x_{max} - x_{min} = 400 - 240 = 160.$$

Variatsioonikoefitsiendi leidmiseks variatsiooniulatuse alusel on vaja teada ka aritmeetilist keskmist, mis tabeli 4.1 andmete alusel on 313,3. Variatsioonikoefitsient on seega:

$$V_R = \frac{R}{\bar{x}} = \frac{160}{313{,}3} = 0{,}511 \text{ ehk } 51{,}1\%.$$

Keskmise lineaarhälbe arvutamiseks tuleb leida variantide individuaalväärtuste ja aritmeetilise keskmise vaheliste hälvete absoluutväärtused (vt. tabel 4.1, veerg 4). Arvutuste lihtsustamiseks ja paremaks jälgimiseks on aritmeetiline keskmine ümardatud täisarvuni (313). Järgnevalt tuleb leida hälvete kaalutud aritmeetiline keskmine. Kuna siin on tegemist aritmeetilise keskmisega, siis saab rakendada ka aritmeetilise keskmise omadust, millo alusel sageduste (kaalude) jagamine mingi vabalt võetud arvuga aritmeetilist keskmist ei muuda. Siin on sobiv võtta selliseks arvuks 500. Kaaludo jagatised selle arvuga h on toodud veerus 5. Veerus 6 on hälvete absoluutväärtuste ja kaaludo $\frac{f_i}{h}$ korrutised $|x_i - \bar{x}|\frac{f_i}{h}$. Keskmine lineaarhälve on antud juhul:

$$\bar{d} = \frac{\Sigma |x_i - \bar{x}| \frac{f_i}{h}}{\Sigma \frac{f_i}{h}} = \frac{1014}{30} = 33{,}8.$$

Keskmise lineaarhälbe alusel leitav variatsioonikoefitsient on:

$$V_{\bar{d}} = \frac{\bar{d}}{\bar{x}} = \frac{33{,}8}{313} = 0{,}108 \text{ ehk } 10{,}8\%.$$

Dispersiooni leidmiseks tuleb samuti arvutada variantide individuaalväärtuste ja aritmeetilise keskmise vahelised hälbed. Arvutustulemus ei muutu, kui kasutada hälvete absoluutväärtusi, sest dispersiooni leidmiseks tuleb arvutada hälvete ruudud, mis on samad nii negatiivsete kui ka positiivsete hälvete korral. Tegelikud hälbed on toodud veerus 7 ning nende ruudud veerus 8. Dispersioon on hälvete ruutude aritmeetiline keskmine ning selle leidmisel on otstarbekas korrutada hälvete ruutusid mitte tegelike kaaludega, vaid konstandiga jagatud kaaludega $\frac{f_i}{h}$, mis on toodud veerus 5.

Korrutised on toodud tabeli 4.1 veerus 9.

Dispersioon leitakse järgmiselt:

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \frac{f_i}{h}}{\Sigma \frac{f_i}{h}} = \frac{50\,670}{30} = 1689.$$

Standardhälve on variantide individuaalväärtuste ja aritmeetilise keskmise vaheliste hälvete ruutkeskmine, kuid ühtlasi ka ruutjuur hälvete ruutude aritmeetilisest keskmisest. Hälvete ruutude aritmeetiline keskmine on aga dispersioon. Seetõttu ongi kõige lihtsam leida standardhälve ruutjuurena dispersioonist

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1689} = 41{,}1.$$

Variatsioonikoefitsient standardhälbe alusel on:

$$V_\sigma = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{41{,}1}{313} = 0{,}131 \text{ ehk } 13{,}1\%.$$

Eeltoodud näide oli võrdlemisi lihtsate arvudega. Praktiliste ülesannete lahendamisel tuleb aga enamasti kokku puutuda hoopis keerulisemate arvudega ning lahendamisel osutub otstarbekaks momentide meetodi tundmine (vt. jaot. 5.2).

4.7. JAOTUSKÕVERA KUJU HINDAMINE

Sümmeetrilises variatsioonreas jagunevad variantide sagedused suurima sageduse suhtes mõlemale poole ühtlaselt. Sümmeetrilisele variantide jaotusele vastab näiteks normaaljaotuse ehk *Gaussi-Laplace*'i kõver, mida tavaliselt võetaksegi sümmeetrilisuse etaloniks.

Ebasümmeetrilises variatsioonreas jagunevad variantide sagedused suurima sageduse suhtes ebaühtlaselt. Suuna järgi eristatakse parem- ja vasakkaldelist ebasümmeetrilisust. Paremkaldelistes ridades on aritmeetiline keskmine väiksem kui mood ($\bar{x} < Mo$), vasakkaldelistes ridades vastupidi ($\bar{x} > Mo$). Suuruse järgi tehakse üldjoontes vahet ridade mõõduka ja täieliku ebasümmeetrilisuse vahel.

Ridade ebasümmeetrilisuse elementaarkarakteristikuna võib kasutada aritmeetilise keskmise ja moodi vahet:

$$A = \bar{x} - Mo.$$

Paremkaldelistes ridades on see vahe negatiivne, vasakkaldelistes positiivne. Seetõttu nimetataksegi paremkaldelist asümmeetriat ka negatiivseks ja vasakkaldelist positiivseks asümmeetriaks.

Täpsemaks asümmeetria kvantitatiivne karakteristik on asümmeetriakoefitsient. Viimasena kasutatakse kolmanda järgu normeeritud momenti:

$$r_3 = \frac{\mu_3}{(\sqrt{\mu_2})^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$

kus μ_2 on teist järku keskmoment;
μ_3 — kolmandat järku keskmoment;
σ — standardhälve.

Sümmeetrilistes ridades $r_3 = 0$. Asümmeetriakoefitsiendi hälbimine 0-st viitab ebasümmeetrilisusele. Paremkaldelise asümmeetria korral $r_3 < 0$, vasakkaldelise asümmeetria korral $r_3 > 0$.

Variatsioonrea jaotuskõvera püstakuse hindamisel võetakse aluseks normaaljaotuskõvera kuju. Variatsioonrea suhtelist püstakust normaaljaotuskõvera suhtes nimetatakse ekstsessiks. Ekstsess leitakse valemiga

$$E = \frac{\mu^4}{\mu_2^2} - 3,$$

kus μ_2 ja μ_4 on vastavat järku keskmomendid.

Normaaljaotuskõvera ekstsess on 0, sest normaaljaotusreas $\mu_4 = \frac{3}{4}$ ja $\mu_2 = \frac{1}{2}$. Sellest tulenevalt on normaaljaotusega ridadest püstakamates ridades ekstsess positiivne ($E > 0$) ja laugjamates ridades negatiivne ($E < 0$). Asümmeetriakoefitsiendi ja ekstsessi arvutamist iseloomustab jaot. 5.4 toodud arvnäide.

4.8. TEOREETILISE VARIATSIOONKÕVERA KONSTRUEERIMINE

Statistiliste meetodite kasutamisel (eriti väljavõttelise vaatluse puhul) eeldatakse enamasti variantide normaaljaotust. Täiesti ideaalset normaaljaotust tavaliselt siiski ei esine, mistõttu osutub vajalikuks empiirilise variatsioonkõvera kuju hindamine ja selle võrdlemine teoreetilisega. Üldise ettekujutuse empiirilise ja teoreetilise variatsioonrea erinevusest annavad asümmeetriakoefitsient ja ekstsess. Selgema ettekujutuse annab teoreetilise variatsioonrea arvutamine ning empiirilise ja teoreetilise variatsioonkõvera võrdlemine arvjoonisel.

Teoreetiliste jaotuskõverate konstrueerimisel empiiriliste andmete alusel tuginetakse funktsioonile

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2},$$

kus u on normhälve.

Funktsiooni väärtuste leidmiseks kasutatakse tavaliselt tabeleid (vt. lisa 6).

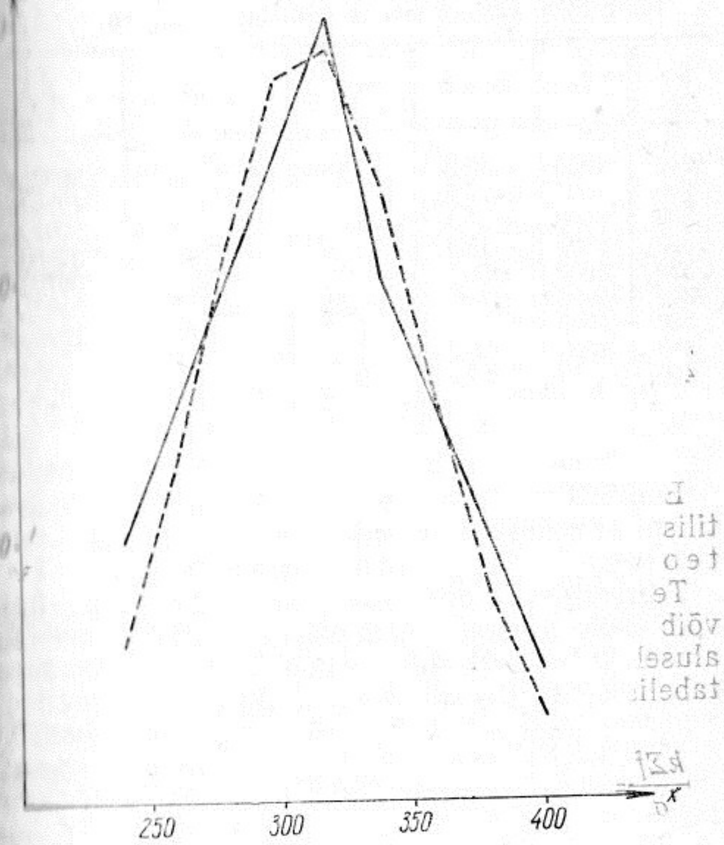
Normhälbed leitakse valemiga

$$u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma},$$

kus x_i on variantide individuaalväärtused;
$\bar{x}$ — aritmeetiline keskmine;
σ — standardhälve.

Empiirilistele väärtustele vastavad teoreetilised sagedused leitakse valemiga

$$f' = \frac{k\Sigma f}{\sigma} \cdot \varphi(u),$$



4.2. Empiiriline ja teoreetiline jaotuskõver

kus f on empiiriline sagedus;
k — variantide väärtuste intervalli pikkus;
σ — standarhälve;
$\varphi(u)$ — funktsiooni väärtus.

Arvutamisel on otstarbekas eelnevalt leida konstant $\frac{k\Sigma f}{\sigma}$ ja seejärel korrutised $\frac{k\Sigma f}{\sigma} \cdot \varphi(u)$.

Tabel 4.2

Teoreetilise variatsioonirea leidmise arvutused

x_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	u_i	$\psi(u)$	f'_i
240	1000	—73,3	—1,78	0,08183	597,3
260	1500	—53,3	—1,30	0,17137	1250,9
280	2000	—23,3	—0,81	0,28737	2097,6
300	2500	—13,3	—0,32	0,37903	2766,6
320	3000	6,7	0,16	0,39322	2870,2
340	2000	26,7	0,65	0,32297	2357,4
360	1500	46,7	1,14	0,20831	1520,5
380	1000	66,7	1,62	0,10741	784,0
400	500	86,7	2,11	0,04307	314,4

Empiiriliste väärtuste ja neile vastavate teoreetiliste sageduste kandmisel arvjoonisele saadakse teoreetiline variatsioonkõver.

Teoreetilise variatsioonkõvera konstrueerimist võib iseloomustada eelnevalt kasutatud arvnäite alusel (vt. tabel 4.1). Arvutused on koondatud tabelisse 4.2 ($\bar{x}=313{,}3$, $\sigma=41{,}1$).

$$\frac{k\Sigma f}{\sigma}=\frac{20\cdot 15\,000}{41{,}1}=7299{,}27.$$

Tabelis 4.2 toodud detailide kaalu (x_i) ja tegeliku esinemissageduse (f_i) alusel saab joonistada empiirilise jaotuskõvera ning detailide kaalu (x_i) ja teoreetilise esinemissageduse (f'_i) alusel teoreetilise jaotuskõvera (joon. 4.2). Nende võrdlemine näitab, et empiiriline kõver on paremkaldelise asümmeetriaga ja pisut püstakam kui teoreetiline kõver.

V MOMENDID

5.1. MOMENTIDE MÕISTE

Momentideks nimetatakse statistikas variantide individuaalväärtuste ja mistahes arvu vaheliste hälvete mingis astmes arvutatud keskmisi.

Momendid liigitatakse hälvete arvutamisel kasutatava suuruse järgi alg-, kesk- ja tingmomentideks. Algmomentide leidmisel hälbed arvutatakse nullist, keskmomentide leidmisel aritmeetilisest keskmisest ja tingmomentide leidmisel meelevaldselt võetud arvust.

Hälvete astme järgi liigitatakse momendid esimest, teist, kolmandat jne. järku momentideks.

Esimest kuni neljandat järku alg-, kesk- ja tingmomentide arvutamise valemid on koondatud tabelisse 5.1.

Tabelis toodud valemid eeldavad esinemissagedustega variatsioonrida. Lihtsa statistilise rea puhul jääb ära variantide korrutamine sagedusega (f) ning murru nimetajas tuleb sageduste summa (Σf) asendada variantide arvuga (n).

5.2. MOMENTIDE KASUTAMINE STATISTILISTES ARVUTUSTES

Eri liiki momentide vahel on mitmesuguseid seoseid ning see võimaldab üht liiki momentide leidmist teist liiki momentide kaudu. Seejuures on oluline teada, et mitmed statistikas teiste nime-

Tabel 51

Momentide arvutamise valemid

Momendi järk	Algmomendid ν (nüü)	Keskmomendid μ (müü)	Tingmomendid η (eeta)
1.	$\nu_1=\frac{\sum(x_i-0)f_i}{\sum f_i}$	$\mu_1=\frac{\sum(x_i-\bar{x})f_i}{\sum f_i}$	$\eta_1=\frac{\sum(x_i-a)f_i}{\sum f_i}$
2.	$\nu_2=\frac{\sum(x_i-0)^2f_i}{\sum f_i}$	$\mu_2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2f_i}{\sum f_i}$	$\eta_2=\frac{\sum(x_i-a)^2f_i}{\sum f_i}$
3.	$\nu_3=\frac{\sum(x_i-0)^3f_i}{\sum f_i}$	$\mu_3=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^3f_i}{\sum f_i}$	$\eta_3=\frac{\sum(x_i-a)^3f_i}{\sum f_i}$
4.	$\nu_4=\frac{\sum(x_i-0)^4f_i}{\sum f_i}$	$\mu_4=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^4f_i}{\sum f_i}$	$\eta_4=\frac{\sum(x_i-a)^4f_i}{\sum f_i}$

Märkus: Variatsioonrea momentide arvutamise üldvalemi võib kirjutada järgmiselt:

$$m_k=\frac{\sum(x_i-A)^kf_i}{\sum f_i},$$

kus m on leitav moment;
k — momendi järk, hälvete aste;
x_i — variandid;
A — hälvete leidmisel lahutatav suurus;
f_i — variantide esinemissagedused.

tuste all tuntud suurused on ühtlasi momendid:

aritmeetiline keskmine = esimest järku algmoment;
ruutkeskmine = ruutjuur teist järku algmomendist;
dispersioon = teist järku keskmoment.

Kõige sagedamini tuleb statistilistes arvutustes leida aritmeetilist keskmist ja dispersiooni.

Aritmeetilise keskmise võib leida esimest järku tingmomendi ja tingliku suuruse summana:

$$\bar{x}=\eta_1+a,$$

kus η_1 on esimest järku tingmoment;
a — tinglik suurus.

Aritmeetilise keskmise leidmine esimest järku tingmomendi ja tingliku suuruse summana on praktiliselt aritmeetilise keskmise ühe omaduse kasutamine arvutamise lihtsustamiseks (vt. jaot. 3.1.1). Siinjuures on otstarbekas tähele panna, et momendid on kõik teatavas astmes hälvete aritmeetilised keskmised, mistõttu nende kohta kehtivad ka aritmeetilise keskmise omadused ning neid võib kasutada arvutuste lihtsustamiseks.

Matemaatilises statistikas on tõestatud, et teist järku keskmoment (dispersioon) võrdub teist järku tingmomendi ja esimest järku tingmomendi ruudu vahega. Dispersiooni võib seega leida järgmise valemiga:

$$\sigma^2=\eta_2-\eta_1^2,$$

kus η_1 on esimest järku tingmoment;
η_2 — teist järku tingmoment.

Sellele seosele tuginevat arvutuskäiku nimetatakse dispersiooni leidmiseks momentide meetodil. Selle eeliseks on võimalus vältida hälvete arvutamist aritmeetilisest keskmisest $(x_i-\bar{x})$, samuti nende ruutude arvutamist, mis väga sageli seostub suure arvutustööga.

Teist järku momendid on hälvete ruutude keskmised. Nende arvutamise lihtsustamiseks saab kasutada astmekeskmise omadusi (vt. jaot. 3.4). Siinjuures tuleb silmas pidada, et teist järku mo-

ment ei ole hälvete ruutkeskmine. Viimase leidmiseks tuleb teist järku momendist võtta ruutjuur. Nii on näiteks standardhälve aritmeetilise keskmise suhtes arvutatud hälvete ruutkeskmine.

Intervallitud variatsioonrea puhul osutub eriti otstarbekaks variantide jagamine vabalt valitud suurusega k. Kuna see võte on sobiv ka aritmeetilise keskmise arvutamisel, siis soodustab see ka esimest järku tingmomendi (η_1) ja selle ruudu arvutamist. Võimaluse korral tuleb ka sagedused f_i jagada selleks sobiva suurusega h. Nii saab dispersiooni momentide meetodil leidmise valemit teisendada järgmiselt:

$$\sigma^2 = \eta_2 - \eta_1^2 = \frac{\Sigma (x_i - a)^2 f_i}{\Sigma f_i} - \left(\frac{\Sigma (x_i - a) f_i}{\Sigma f_i} \right)^2 =$$

$$= \left[\frac{\Sigma \left(\frac{x_i - a}{k} \right)^2 \frac{f_i}{h}}{\Sigma \frac{f_i}{h}} - \left(\frac{\Sigma \left(\frac{x_i - a}{k} \right) \frac{f_i}{h}}{\Sigma \frac{f_i}{h}} \right)^2 \right] k^2.$$

Selliselt kirjutatud valem on küll keerulisem, kuid sellest on näha dispersiooni lihtsustatud arvutamise käik. Arvnäide on toodud tabelis 5.2.

$$\sigma^2 = \left[\frac{\Sigma \left(\frac{x_i - a}{k} \right)^2 \frac{f_i}{h}}{\Sigma \frac{f_i}{h}} - \left(\frac{\Sigma \left(\frac{x_i - a}{k} \right) \frac{f_i}{h}}{\Sigma \frac{f_i}{h}} \right)^2 \right] k^2 =$$

$$= \left[\frac{130}{30} - \left(\frac{-10}{30} \right)^2 \right] 20^2 =$$

$$= (4{,}3333 - 0{,}1111)\, 400 = 1688{,}9;$$

Tabel 5.2

Momentide meetodil variatsioonrea dispersiooni ja standardhälbe arvutamine

Jrk. nr.	x_i	f_i	$x_i - a$, $a = 320$	$\frac{x_i - a}{k}$, $k = 20$	$\left(\frac{x_i - a}{k}\right)^2$	$\frac{f_i}{h}$, $h = 500$	$\left(\frac{x_i - a}{k}\right)\frac{f_i}{h}$	$\left(\frac{x_i - a}{k}\right)^2 \frac{f_i}{h}$
1.	240	1000	−80	−4	16	2	−8	32
2.	260	1500	−60	−3	**9**	3	−9	27
3.	280	2000	−40	−2	**4**	4	−8	16
4.	300	2500	−20	−1	1	5	−5	5
5.	320	3000	0	0	0	6	0	0
6.	340	2000	20	1	1	4	4	4
7.	360	1500	40	2	4	3	6	12
8.	380	1000	60	3	9	2	6	18
9.	400	500	80	4	16	1	4	16
Kokku	×	×	×	×	×	30	−10	130

$$\bar{x}=\eta_1+a=\frac{\Sigma\left(\frac{x_i-a}{k}\right)\frac{f_i}{h}}{\Sigma\frac{f_i}{h}}k+a=$$

$$=\frac{-10}{30}\cdot 20+320=-6{,}7+320=313{,}3.$$

5.3. INTERVALLITUD VARIATSIOONREA TINGMOMENTIDE LEIDMINE LIITMISMENETLUSEGA

Intervallitud variatsioonrea puhul, kui intervallid on võrdsed, saame tingmomendid leida ka liitmismenetlusega. Selleks tuleb leida intervallide keskmised ning üks neist valida tinglikuks suuruseks a.

Esimest järku tingmomendi valem on:

$$\eta_1=\frac{\delta_2-\delta_1}{\Sigma f_i}k,$$

kus δ_1 on variandist a väiksemate variantide sageduste järgsummade järgsumma (teist järku järgsumma);
δ_2 — variandist a suuremate variantide sageduste teist järku järgsumma;
f_i — sagedused;
k — intervalli pikkus.

Teist järku tingmomendi valem on:

$$\eta_2=\frac{2(E_1+E_2)-(\delta_1+\delta_2)}{\Sigma f_i}k^2,$$

kus E_1 on variandist a väiksemate variantide sageduste kolmandat järku järgsumma;
E_2 — variandist a suuremate variantide sageduste kolmandat järku järgsumma.

Teades esimest ja teist järku tingmomente, saab lihtsalt leida ka aritmeetilist keskmist ja dispersiooni (vt. jaot. 3.1.4 ja 4.3.1). Dispersiooni arvutamisel on otstarbekas jätta korrutamine suurusega k viimaseks tehteks.

Liitmismenetluse rakendamist tingmomentide ning aritmeetilise keskmise ja dispersiooni leidmisel selgitab tabelis 5.3 toodud arvnäide. Tinglik suurus $a=320$.

Sõltuvalt on otstarbekas rakendada keskmiste seda omadust, mille alusel variantide sageduste vähendamine või suurendamine teatav arv h korda keskmise väärtust ei muuda.

$$\eta_1=\frac{\delta_2-\delta_1}{\Sigma\frac{f_i}{h}}k=\frac{20-30}{30}\cdot 20=\frac{-10}{30}\cdot 20=-6{,}7;$$

Tabel 5.3

Liitmismenetluse rakendamine aritmeetilise keskmise ja dispersiooni arvutamisel

Jrk. nr.	x_i	f_i	$\frac{f_i}{h}$ $h=500$	s_1	s_2	s_3
1	240	1000	2	2	2	2
2	260	1500	3	5	7	9
3	280	2000	4	9	16	25
4	300	2500	5	14	$30\delta_1$	$55E_1$
5	320	3000	6	—	—	—
6	340	2000	4	10	$20\delta_2$	$35E_2$
7	360	1500	3	6	10	15
8	380	1000	2	3	4	5
9	400	500	1	1	1	1
Kokku	×	×	30	×	×	×

$$\bar{x}=\eta_1+a=-6{,}7+320=313{,}3;$$

$$\eta_2=\frac{2(E_1+E_2)-(\delta_1+\delta_2)}{\sum\frac{f_i}{h}}k^2=$$

$$=\frac{2(55+35)-(30+20)}{30}\cdot 20^2=\frac{130}{30}\cdot 20^2=$$

$$=1733{,}4;$$

$$\sigma^2=\eta_2-\eta_1^2=1733{,}3-(-6{,}7)^2=1688{,}4,$$

ehk

$$\sigma^2=\frac{130}{30}\cdot 20^2-\left(\frac{-10}{30}\cdot 20\right)^2=$$

$$=20^2\left[\frac{130}{30}-\left(\frac{-10}{30}\right)^2\right]=1688{,}9.$$

5.4. VARIATSIOONREA KUJU HINDAMINE MOMENTIDE ABIL

Variatsioonridade sümmeetrilisuse hindamiseks kasutatakse asümmeetriakoefitsienti, kolmandat järku normeeritud momenti (vt. jaot. 4.7). See koefitsient arvutatakse valemiga:

$$r_3=\frac{\mu_3}{(\sqrt{\mu_2})^3}=\frac{\mu_3}{\sigma^3},$$

kus μ_3 on kolmandat järku keskmoment;
σ — standardhälve.

Asümmeetriakoefitsiendi arvutamist saab lihtsustada, teades järgmist seost:

$$\mu_3=\eta_3-3\eta_2\eta_1+2\eta_1^2$$

kus η_1; η_2 ja η_3 on vastavat järku tingmomendid.

Asümmeetriakoefitsiendi arvutamist iseloomustab arvnäide tabelis 5.2 toodud andmete alusel. Esimest ja teist järku tingmomendid saab leida tabelis 5.2 ja selle all tehtud arvutusi jätkates. Kolmandat järku tingmomendi leidmiseks tuleb leida veel hälvete kuupide ja sageduste korrutiste summa ning teguri k kuup (vt. tabel 5.4).

$$\eta_1=\frac{\sum\left(\frac{x_i-a}{k}\right)\frac{f_i}{h}}{\sum\frac{f_i}{h}}k=\frac{-10}{30}\cdot 20=-6{,}7;$$

$$\eta_2=\frac{\sum\left(\frac{x_i-a}{k}\right)^2\frac{f_i}{h}}{\sum\frac{f_i}{h}}k^2=\frac{130}{30}\cdot 400=1733{,}3;$$

$$\eta_3=\frac{\sum\left(\frac{x_i-a}{k}\right)^3\frac{f_i}{h}}{\sum\frac{f_i}{h}}k^3=\frac{-100}{30}\cdot 8000=$$

$$=-26666{,}7;$$

$$\mu_3=\eta_3-3\eta_2\eta_1+2\eta_1^2=$$

$$=-26666{,}7-3\cdot 1733{,}3\cdot(-6{,}7)+2\cdot(-6{,}7)^2=$$

$$=-26666{,}7+34839{,}3+89{,}8=8262{,}4;$$

$$\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{1688{,}9}=41{,}1;$$

$$\sigma^3=41{,}1^3=69426{,}5;$$

$$r_3=\frac{\mu_3}{\sigma^3}=\frac{8262{,}4}{69426{,}5}=0{,}119.$$

Asümmeetriakoefitsient näitab, et antud variatsioonrea puhul on tegemist väikese positiivse ehk vasakkaldelise asümmeetriaga.

Rea suhtelise püstakuse hindamiseks arvutatakse ekstsess:

$$E=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}-3,$$

kus μ_2 ja μ_4 on vastavat järku keskmomendid.

Ekstsessi arvutamist saab lihtsustada teades järgmisi seoseid:

$$\mu_2=\eta_2-\eta_1^2=\sigma^2 \quad \text{ja}$$
$$\mu_4=\eta_4-4\eta_3\eta_1+6\eta_2\eta_1^2-3\eta_1^4,$$

kus η_1; η_2; η_3 ja η_4 on vastavat järku tingmomendid;

σ^2 — dispersioon.

Ekstsessi arvutamist iseloomustab arvnäide tabelis 5.2 toodud andmete alusel. Täiendavad arvutused on toodud tabelis 5.4.

Tabel 5.4

Täiendavaid arvutusi kolmandat ja neljandat järku tingmomendi leidmiseks (algandmed tabelis 5.2)

Jrk. nr.	$\left(\frac{x_i-a}{k}\right)^3$	$\frac{f_i}{h}$	$\left(\frac{x_i-a}{k}\right)^3\frac{f_i}{h}$	$\left(\frac{x_i-a}{k}\right)^4$	$\left(\frac{x_i-a}{k}\right)^4\frac{f_i}{h}$
1	—64	2	—128	256	512
2	—27	3	—81	81	243
3	—8	4	—32	16	64
4	—1	5	—5	1	5
5	0	6	0	0	0
6	1	4	4	1	4
7	8	3	24	16	48
8	27	2	54	81	162
9	64	1	64	256	256
Kokku	×	30	—100	×	1294

$$\eta_4=\frac{\sum\left(\frac{x_i-a}{k}\right)^4\frac{f_i}{h}}{\sum\frac{f_i}{h}}k^4=$$

$$=\frac{1294}{30}\cdot 160\,000=6\,901\,333{,}2;$$

$$\mu_4=\eta_4-4\eta_3\eta_1+6\eta_2\eta_1^2-3\eta_1^4=$$
$$=6\,901\,333{,}2-4\cdot(-26\,666{,}7)\,(-6{,}7)+$$
$$+6\cdot 1733{,}3\cdot(-6{,}7)^2-3(-6{,}7)^4=$$
$$=6\,901\,333{,}2-714\,667{,}6+466\,847{,}0-$$
$$-6045{,}3=6\,647\,467{,}3;$$
$$\mu_2=\sigma^2=1688{,}9;$$
$$\mu_2^2=1688{,}9^2=2\,852\,383{,}2;$$
$$E=\frac{6\,647\,467{,}3}{2\,852\,383{,}2}-3=2{,}33-3=-0{,}67.$$

Arvutatud ekstsess näitab, et antud juhul on tegemist normaaljaotuskõverast laugjama jaotuskõveraga (ekstsess on negatiivne).

VI VÄLJAVÕTTELINE VAATLUS

6.1. VÄLJAVÕTTELISE VAATLUSE MÕISTE

Väljavõtteline vaatlus on mittekõikne vaatlus, mis hõlmab suhteliselt väikese osa vaatlusobjektist, kusjuures sellest tulenevad järeldused üldistatakse kogu vaatlusobjektile, tuginedes tõenäosusteoreetilistele arvutustele ning vaatlusega hõlmatava kogumi moodustamise tagatud juhuslikkuse printsiibile. Tagatud juhuslikkus tähendab seda, et kõigil üldkogumi liikmetel on võrdne võimalus sattuda väljavõtukogumisse.

Tegelikult vaatlusega hõlmatavat osa vaatlusobjektist nimetatakse väljavõtukogumiks, tervet vaatlus- ehk uurimisobjekti üldkogumiks. Vastavalt sellele tehakse vahet väljavõtu- ja üldkogumi karakteristikute vahel.

Väljavõttelist vaatlust eristavad teistest mittekõikse vaatluse meetoditest (monograafiline, võrdlevmonograafiline ja põhimassi meetod) mitmesugused tunnused, kusjuures peamiseks iseärasuseks on väljavõttelise vaatluse tuginemine tõenäosusteooriale. Väljavõttelise vaatluse metoodikat rakendatakse võimaluse piirides ka ankeetvaatluse juures, kuid tavaliselt takistab seda asjaolu, et ankeetvaatluse korral ei saavutata vaadeldava kogumi moodustumise tagatud juhuslikkust.

Väljavõtukogumi sobivust üldkogumi iseloomustamiseks nimetatakse tema esinduslikkuse ehk representatiivsuseks (ladina keelest *representare* — kujukalt esindama). Statistiline representatiivsus eeldab väljavõtukogumi koostise vastavust üldkogumi koostisele. Sellise koostise saamise tingimuseks on varem mainitud tagatud juhuslikkuse printsiibi rakendamine ning väljavõtukogumi elementide (liikmete) piisav arv.

Juhuslikkuse printsiibi rakendamiseks on mitmeid võimalusi, näiteks loosimine, juhuslike arvude tabeli kasutamine jne.

Väljavõtukogumi suurus oleneb eelkõige uuritava tunnuse varieerumisest üldkogumis. Täiesti ühtlase kogumi puhul piisaks üldkogumi iseloomustamiseks ainult ühe elemendi vaatlemisest. Väljavõtukogumi elementide arvu kindlaksmääramiseks on leitud vastavad valemid, mida käsitletakse allpool.

6.2. VÄLJAVÕTTELISE VAATLUSE LIIGID

Väljavõtukogumi moodustamise viisi järgi liigitatakse väljavõttelist vaatlust järgmiselt:

1) juhuväljavõtt,
2) mehaaniline väljavõtt,
3) tüüpväljavõtt,
4) seeriaväljavõtt.

Juhuväljavõtu korral moodustatakse väljavõtukogum puhtjuhuslikult, kolme järgmise väljavõtuviisi juures on tegemist teatava suunamisega, mistõttu neid nimetatakse suunatud väljavõtu viisideks (kuid nendegi vaatlusviiside juures kehtib tagatud juhuslikkuse printsiip).

Eraldi vaatlusviisina käsitletakse väikeväljavõttu.

Vastavalt üldkogumi elementide väljavõtukogu-

misse sattumise võimalusele eristatakse kordumistega ja kordumisteta väljavõttu. Viimasel juhul on ühe ja sama üldkogumi elemendi korduv sattumine väljavõtukogumisse välistatud.

6.3. VÄLJAVÕTTELISE VAATLUSE VEAD

Üld- ja väljavõtukogumi analoogiliste näitarvude vahet nimetatakse esindus- ehk representatiivsusveaks:

$$\mu = \Theta - \Theta_v,$$

kus μ on esindusviga;
Θ — üldkogumi karakteristik;
Θ_v — väljavõtukogumi karakteristik.

Üldkogumi karakteristikut tavaliselt ei teata. Väljavõttelise vaatluse eesmärk ongi üldkogumi karakteristikute leidmine. Seetõttu on parem siduda üld- ja väljavõtukogumi karakteristikud järgmise võrdusega:

$$\Theta = \Theta_v \pm \mu.$$

Väljavõttelisel vaatlusel tuleb üldkogumi iseloomustamiseks lisaks väljavõtukogumi karakteristikutele leida veel esindusviga.

Väljavõttelise vaatluse juures eeldatakse tavaliselt normaaljaotust. Standardhälbe järgi leitava esindusveaga hinnatav üldkogumi keskmine vastab seega *Gaussi-Laplace*'i jaotuskõvera käänupunktide vahele jääval abstsisstelje lõigul esinevatele väärtustele tõenäosusega P=0,6827. Selleks et leida mõnele muule tõenäosusele vastav väljavõttelise vaatluse piirviga, tuleb esindusviga korrutada tõenäosuskordajaga:

$$\Delta = t \cdot \mu,$$

kus Δ on piirviga;
t — tõenäosuskordaja.

Tõenäosuskordaja väärtused võib leida vastava valemiga, kuid tavaliselt kasutatakse selleks nn. tõenäosusintegraali väärtuste tabelit (vt lisa 8).

Ühest ja samast üldkogumist võib moodustada praktiliselt piiramatu arvu väljavõtukogumeid, kusjuures pole põhjust eeldada, et esindusviga ei teki või et esindusviga on maksimaalselt võimalik (väljavõtukogumisse on sattunud ainult minimaalse või maksimaalse väärtusega elemendid). Hoopis rohkem on põhjust eeldada, et väljavõtukogumisse satub mitmesuguse väärtusega elemente. See tähendab, et esindusvea kindlaksmääramisel leitakse mitte tema maksimaalne (minimaalne on 0), vaid keskmine väärtus, mille realiseerumise tõenäosus on suurim. Seetõttu tuleks rääkida mitte mingist konkreetsest esindusveast, vaid keskmisest esindusveast. See tinglikkus kandub üle ka esindusvea abil leitavale üldkogumi karakteristikule. Viimane on õige ainult esindusvea tõenäosusega. Kuna esindusvea leidmisel on peaaegu alati tegemist keskmise esindusveaga ja mitte mingi ühe kindlalt määratletud esindusveaga, siis seda tavaliselt ei toonitata. Mõistet «*esindusviga*» kasutatakse keskmise esindusvea tähenduses.

Keskmise esindusvea ja väljavõtukogumi liikmete arvu leidmise valemid on allpool toodud vastavalt väljavõtuviisidele, lähtudes üldkogumi kvantitatiivse tunnuse keskmise väärtuse uurimise ülesandest. Siinjuures võib meenutada, et alternatiivse kvalitatiivse tunnusega kogumi elementide osamäära dispersioon leitakse valemiga:

$$\sigma^2 = p(1-p) = pq,$$

kus p on ühe alternatiivse tunnusega elementide osamäär;
q — teise alternatiivse tunnusega elementide osamäär.

Kvantitatiivse tunnuse keskmise väärtuse väljavõttelisel vaatlusel rakendatavad valemid on kasutatavad ka alternatiivse tunnusega elementide osamäära uurimisel.

6.4. JUHUVÄLJAVÕTT

Juhuväljavõttu nimetatakse ka puhtakujuliseks juhuväljavõtuks, toonitamaks selle väljavõtuviisi tuginemist täielikult tagatud juhuslikkuse printsiibile, rakendamata esindusvea vähenemist soodustavaid suunamisvõtteid.

Kordumistega juhuväljavõtu esindusvea valem on:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

kus μ on esindusviga;
σ^2 — dispersioon;
σ — standardhälve;
n — väljavõtukogumi elementide arv.

Kordumisteta juhuväljavõtu esindusvea valem on:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N}},$$

kus N on üldkogumi elementide arv.

Kordumisteta juhuväljavõtu esindusviga eristab kordumistega juhuväljavõtu veast väljavõtukogumi ja üldkogumi suuruse suhet arvestav tegur $\sqrt{1 - \frac{n}{N}}$. Väljavõtukogumi suurendamisel see tegur muutub väiksemaks (ta on alati väiksem kui 1). Kordumisteta juhuväljavõtu esindusviga on alati väiksem kui kordumistega juhuväljavõtu esindusviga.

Esindusvea arvutamisel on kõige aeganõudvam töö dispersiooni arvutamine (vt. jaot. 4.3). Kuna üldkogumi dispersiooni ei teata, siis asendatakse see esindusvea leidmisel väljavõtukogumi dispersiooniga. Viimast tähistatakse paljudes käsiraamatutes s^2, eristamaks teda üldkogumi dispersioonist σ^2. Selline tähistamine on otstarbekas, kuid nende tähistuste kasutamine valemites siiski mitte, sest valemites on eeldatud ikkagi üldkogumi karakteristikute kasutamist.

Esindusvea ja piirvea ning üldkogumi keskmise arvutamist iseloomustab järgnev näide. Tsehhis valmistatavate detailide kaalu ja kvaliteeti uuriti kordumisteta juhuväljavõtu teel. 3000 detailist võeti väljavõtukogumisse 20 protsenti. Vaatlusandmetel oli detailide keskmine kaal 552 grammi ning standardhälve 50 grammi, kõrgema sordi osamäär 60 protsenti. Tuleb leida üldkogumi detailide keskmise kaalu ja kõrgema sordi osamäära piirviga tõenäosusega 0,9973.

Väljavõtukogumi elementide arv on 600 (20 protsenti 3000-st). Suhet $\frac{n}{N}$ ei ole vaja arvutada, sest see on antud lähteandmetes (20 protsenti ehk 0,2).

Esindusviga on seega

$$\mu=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(1-\frac{n}{N}\right)}=\frac{50}{\sqrt{600}}\sqrt{1-0{,}2}=1{,}6.$$

Tõenäosusele 0,9973 vastab tõenäosuskordaja 3 (vt. lisa 8).

$\Delta=t\mu=3\cdot 1{,}6=4{,}8.$

Üldkogumi detailide keskmine kaal

$\bar{x}_{P=0{,}9973}=\tilde{x}\pm\Delta=552\pm 4{,}8$ grammi.

Seda kirjutatakse sageli ka teisiti:

$\tilde{x}-\Delta<\bar{x}<\tilde{x}+\Delta$ (P),

seega vaadeldava näite puhul

$552-4{,}8<\bar{x}<552+4{,}8$ (P=0,9973) ehk
$547{,}2<\bar{x}<556{,}8$ (P=0,9973).

Kõrgema sordi osamäära dispersioon väljavõtukogumi andmetel:

$\sigma^2=pq=0{,}6\cdot 0{,}4=0{,}24.$

Esindusviga on siis

$$\mu=\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}=\sqrt{\frac{0{,}24}{600}\cdot 0{,}8}=0{,}018$$

ja piirviga $\Delta=t\mu=3\cdot 0{,}018=0{,}054$ ehk 5,4%.

Üldkogumi kõrgema sordi osamäär on vahemikus

$54{,}6<p<65{,}4$ protsendi (P=0,9973).

Toodud näite puhul oli alternatiivse tunnusega elementide osamäär nii väljavõtukogumis kui ka üldkogumis tähistatud p-ga. Sageli tähistatakse

seda osamäära väljavõtukogumis tähega ω, kuid on mõeldavad ka muud tähistusviisid.

Väljavõtukogumi elementide arv leitakse järgmiste valemitega:

a) kordumistega juhuväljavõtu korral:

$$n=\frac{t^2\sigma^2}{\Delta^2},$$

b) kordumisteta juhuväljavõtu korral:

$$n=\frac{t^2\sigma^2 N}{\Delta^2 N+t^2\sigma^2}.$$

Valemites esinevate karakteristikute väärtused on üldiselt määratavad vaatlustingimustega. Raskusi valmistab dispersiooni kindlaksmääramine. Kvantitatiivsete tunnuste uurimisel tuleb tugineda teistele analoogilistele vaatlustele või korraldada katsevaatlus. Alternatiivse tunnuse puhul on olukord lihtsam, sest siis võib lähtuda maksimaalsest dispersioonist ($\sigma^2=0{,}5\cdot 0{,}5=0{,}25$).

Väljavõtukogumi suuruse (elementide arvu) leidmist selgitavad järgmised näited.

1. Ettevõttes tuleb väljavõttelise vaatluse teel kontrollida toodete kaalu. Varasematel vaatlustel oli toodete keskmine kaal 53 grammi, standardhälve 6 grammi. Väljavõttelise vaatluse piirviga ei tohi olla üle 2 grammi. Vaatlusel eeldatakse tõenäosust 0,9973. Vaadeldava partii suurus (üldkogum) on 4000. Kui suur peab olema väljavõtukogum kordumisteta juhuväljavõtu korral?

$t=3$ (vt. lisa 8); $t^2=9$;
$\sigma=6$; $\sigma^2=36$;
$\Delta=2$; $\Delta^2=4$;
$N=4000$;

$$n=\frac{9\cdot 36\cdot 4000}{4\cdot 4000+9\cdot 36}\approx 80.$$

Väljavõtukogumisse tuleb võtta 80 toodet.

Kui samal vaatlusel rakendada kordumistega juhuväljavõttu, siis on väljavõtukogum

$$n=\frac{t^2\sigma^2}{\Delta^2}=\frac{9\cdot 36}{4}=81.$$

Kordumistega väljavõtu korral on väljavõtukogum suurem, kuigi erinevus on väga väike.

2. Postkontoris tahetakse kindlaks teha erakirjade osamäära tõenäosusega 0,9545 ja piirveaga 5 protsenti. Varem selliseid vaatlusi korraldatud ei ole. Kui suur peaks olema väljavõtukogum kordumistega juhuväljavõtu korral?

$t=2$ (vt. lisa 8); $t^2=4$;
$\sigma=0{,}5$ (on võetud maksimaalne); $\sigma^2=0{,}25$;
$\Delta=5\%$ ehk 0,05; $\Delta^2=0{,}0025$;

$$n=\frac{4\cdot 0{,}25}{0{,}0025}=400.$$

Väljavõtukogumisse tuleb võtta 400 kirja. Kui see kogum on liiga suur, siis tuleb kaaluda, kas on võimalik leppida väiksema tõenäosusega või suurema piirveaga.

6.5. MEHAANILINE VÄLJAVÕTT

Mehaanilist väljavõttu kasutatakse niisuguste üldkogumite uurimisel, mille elemendid on mingi tunnuse järgi järjestatud või järjestatavad. Mehaanilise väljavõtu puhul jagatakse üldkogum nii mitmeks rühmaks, kui palju tuleb võtta väljavõtukogumisse elemente ning igast

rühmast võetakse üks element. Praktiliselt on siiski otstarbekam arvutada väljavõtuvahemik ning võtta väljavõtukogumisse elemente selle vahemiku tagant. Väljavõtuvahemik leitakse üld- ja väljavõtukogumi elementide arvu suhtena.

$$k=\frac{N}{n},$$

kus k on väljavõtuvahemik (-intervall);
N — üldkogumi elementide arv;
n — väljavõtukogumi elementide arv.

Järjestamiseks kasutatakse mitmesuguseid tunnuseid. Inimesed on väga sageli järjestatud nimede järgi tähestikulises järjekorras. Kui väljavõtukogum on üks kümnendik üldkogumist, siis võib väljavõtukogumsise võtta iga kümnenda inimese nimekirjast. Alustada võib suvaliselt esimesest kuni kümnendast inimesest nimekirjas, kuid esimese võib ka loosida. Toodangut võib järjestada valmimise aja järgi ning võtta tooteid väljavõtukogumisse väljavõtuvahemiku järgi vastavalt valmimise järjekorrale. Järjestamiseks valitav tunnus peab tagama juhuslikkuse ja ühtlasi soodustama väljavõtukogumi sarnanemist üldkogumile.

Mehaanilise väljavõtu esindusvea ja väljavõtukogumi elementide arvu kindlaksmääramisel kasutatakse juhuväljavõtu valemeid (vt. jaot. 6.4). Mehaanilisel väljavõtul on küll mõningane sarnasus tüüpväljavõtuga, sest üldkogum jaotatakse siin järjestustunnuse järgi võrdseteks osadeks, kuid tüüpväljavõtul kasutatavad valemid ei ole mehaanilise väljavõtu puhul rakendatavad, sest ei ole võimalik arvutada üldkogumi osade dispersioone — igas osas on vaid üks element. Seetõttu ongi osutunud paratamatuks juhu-

väljavõtu valemite kasutamine. Väljavõttelist vaalust käsitlevatel autoritel ei ole aga üksmeelt küsimuses, kas kasutada kordumistega või kordumisteta juhuväljavõtu valemeid.

Mehaanilise väljavõtu korral kordumistega väljavõttu ei saa esineda ning seetõttu soovitab osa autoreid kasutada kordumisteta juhuväljavõtu valemeid [7]. Osa autoreid peab otstarbekamaks kasutada kordumistega juhuväljavõtu valemeid [10]. Kordumistega juhuväljavõtu valemi järgi leitud esindusviga on suurem kui kordumisteta juhuväljavõtu valemi järgi leitud esindusviga, mistõttu esimese kasutamine hinnangute juures vähendab eksimise riski.

6.6. TÜÜPVÄLJAVÕTT

Tüüpväljavõttu iseloomustab üldkogumi jaotamine ühetüübilisteks osadeks mingi olulise tunnuse järgi. Seda tehakse enne väljavõtukogumi moodustamist ja see eeldab mõningaid teadmisi üldkogumi struktuuri kohta. Väljavõtukogumisse võetakse elemente proportsionaalselt üldkogumi vastava osa suurusele, kusjuures selleks kasutatakse juhu- või mehaanilise väljavõtu menetlust. Väljavõtukogumi selline moodustamine võimaldab lähendada väljavõtukogumi struktuuri üldkogumi struktuurile ning seega luua eeldused esindusvea vähendamiseks.

Tüüpväljavõtu eri liik on rajoonitud ehk tsonaalne väljavõtt, mille puhul üldkogum jaotatakse osadeks mingi territoriaalse tunnuse järgi.

Tüüpväljavõtu esindusvea arvutamiseks kasutatavad valemid on väga sarnased juhuväljavõtu

esindusvea valemitega, kuid sisuliselt on neil küllaltki oluline erinevus. Üldkogumi dispersioon σ^2 on siin asendatud rühmdispersioonide keskmisega $\overline{\sigma_i^2}$. Kui üldkogumi rühmdispersioonide keskmist ei ole teada (tavaliselt see nii ongi), siis kasutatakse selle asemel väljavõtukogumi rühmdipersioonide keskmist $\overline{s_i^2}$.

Dispersioonide liitmise lausest on teada (vt. jaot. 4.3.3) et

$$\sigma^2 = \overline{\sigma_i^2} + \delta^2,$$

kus δ^2 on rühmadevaheline dispersioon.

Siit järeldub, et tüüpväljavõtu esindusviga on väiksem kui juhuväljavõtu esindusviga, erandjuhul sellega võrdne, sest

$$\overline{\sigma_i^2} \leqslant \sigma^2.$$

Rühmdispersioonide keskmine leitakse kaalutud aritmeetilise keskmisena rühmade dispersioonidest

$$\overline{\sigma_i^2} = \frac{\Sigma \sigma_i^2 f_i}{\Sigma f_i},$$

kus σ_i^2 on vaadeldava tunnuse dispersioon rühmas;

f_i — rühma elementide arv.

Tüüpväljavõtu esindusviga leitakse kordumistega väljavõtu korral valemiga

$$\mu = \sqrt{\frac{\overline{\sigma_i^2}}{n}}$$

ja kordumisteta väljavõtu korral valemiga

$$\mu=\sqrt{\frac{\overline{\sigma_i^2}}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}.$$

Meenutame, et alternatiivse tunnuse puhul

$\overline{\sigma_i^2}=\overline{p_iq_i}=\overline{p_i(1-p_i)}$ ning

$\overline{s_i^2}=\overline{w_i(1-w_i)}$.

Tüüpväljavõtu piirvea arvutamine toimub analoogiliselt juhuväljavõtu piirvea arvutamisele (vt. jaot. 6.4).

Väljavõtukogumi elementide arv tüüpväljavõtu korral leitakse samuti juhuväljavõtuga analoogiliste valemite alusel, kusjuures erisuseks on ülddispersiooni asendamine rühmdispersioonide keskmisega $\overline{\sigma_i^2}$.

Vastavad valemid on seega kordumistega väljavõtu korral

$$n=\frac{t^2\overline{\sigma_i^2}}{\Delta^2}$$

ja kordumisteta väljavõtu korral

$$n=\frac{t^2\overline{\sigma_i^2}N}{\Delta^2N+t^2\overline{\sigma_i^2}}.$$

Väljavõtukogumi elementide arvu võib leida ka iga rühma kohta eraldi juhuväljavõtu valemiga.

Mõnel juhul osutub paratamatuks moodustada väljavõtukogumi rühmad mitteproportsionaalselt üldkogumi rühmadele. Sellisel juhul omandavad esindusvea valemid järgmise kuju:

kordumistega juhuväljavõtu korral

$$\mu=\frac{1}{N}\sqrt{\Sigma\frac{\sigma_i^2}{n_i}N_i}$$

ja kordumisteta juhuväljavõtu korral

$$\mu=\frac{1}{N}\sqrt{\Sigma\frac{\sigma_i^2}{n_i}N_i\left(1-\frac{n_i}{N_i}\right)}.$$

Tüüpväljavõtul saab kõige väiksema esindusvea siis, kui arvestada tunnuse varieerumist igas rühmas. Sellisel juhul leitakse väljavõtukogumi elementide arv igas rühmas valemiga:

$$n_i=\frac{nN_i\sigma_i}{\Sigma N_i\sigma_i}.$$

Kui väljavõtukogum on moodustatud proportsionaalselt uuritava tunnuse väärtuse varieerumisele igas rühmas, siis esindusviga leitakse järgmiste valemitega:

kordumistega juhuväljavõtu korral

$$\mu=\frac{1}{N}\Sigma\frac{\sigma_iN_i}{\sqrt{n_i}}$$

ja kordumisteta juhuväljavõtu korral

$$\mu=\frac{1}{N}\Sigma\frac{\sigma_iN_i}{\sqrt{n_i}}\sqrt{1-\frac{n_i}{N_i}}.$$

Kui üldkogumi elemendid on mingi tunnuse

järgi järjestatud, siis võib väljavõtukogumi rühmade moodustamisel tüüpväljavõtul kasutada juhuväljavõtu asemel ka mehaanilist väljavõttu (vt. jaot. 6.5).

6.7. SEERIAVÄLJAVÕTT

Seeriaväljavõtt erineb oluliselt juhu-, tüüp- ja mehaanilisest väljavõtust. Seeriaväljavõtu puhul võetakse üldkogumi elemente väljavõtukogumisse teatud tunnuste kaudu omavahel seotud seeriate kaupa, teiste väljavõtuviiside puhul aga ükshaaval. Seeriaväljavõtukogumi moodustamisel võivad seeriad olla võrdsed või ebavõrdsed. Seeriad võetakse väljavõtukogumisse juhu- või mehaanilise väljavõtu alusel. Iga seeria ulatuses toimub kõikne vaatlus.

Seeriaväljavõtt on enamasti organisatsiooniliselt lihtsam kui teised väljavõtuviisid. Nii näiteks on vaatlus korterite lõikes hoopis lihtsam kui üksikisikute lõikes. Seeriaväljavõtt annab sageli ka rohkem andmeid kui üksikväljavõtuviisid. Üksikisikute uurimisel saame andmeid vaid nende endi kohta, korterite lõikes saame aga andmeid ka korterielanike kui kollektiivi kohta. Seeriaväljavõtt võimaldab saada ka nn. seeriasisest informatsiooni.

Kogumi elementidena käsitatakse seeriaväljavõtul seeriaid.

Võrdsete seeriatega seeriaväljavõtul leitakse esindusviga järgmiste valemitega:

kordumistega väljavõtu korral

$$\mu = \sqrt{\frac{\delta^2}{l}}$$

ja kordumisteta väljavõtu korral

$$\mu = \sqrt{\frac{\delta^2}{l}\left(1 - \frac{l}{L}\right)}$$

kus δ^2 on seeriatevaheline dispersioon;
l — seeriate arv väljavõtukogumis;
L — seeriate arv üldkogumis.

Seeriatevaheline dispersioon leitakse valemiga

$$\delta^2 = \frac{\Sigma(\bar{x}_i - \bar{x})^2}{L}.$$

Üldkogumi seeriatevahelise diseprsiooni δ^2 asemel tuleb tavaliselt kasutada väljavõtukogumi seeriatevahelist dispersiooni s_l^2. Viimane leitakse kvantitatiivsete tunnuste uurimisel järgmise valemiga:

$$s_l^2 = \frac{\Sigma(\tilde{x}_i - \tilde{x})^2}{l},$$

kus $\tilde{x}_i$ on variantide individuaalväärtuste keskmised väljavõtuseeriates ($i = 1, 2, \ldots, l$);
$\tilde{x}$ — väljavõtukogumi üldine keskmine;
l — seeriate arv väljavõtukogumis.

Seeriaväljavõtu esindusviga on üldjuhul väiksem kui juhuväljavõtu esindusviga, erandjuhul sellega võrdne, sest dispersioonide liitmise lause alusel $\delta^2 \leqslant \sigma^2$ ja $s_l^2 \leqslant s^2$.

Alternatiivsete tunnuste puhul on võrdsete seeriate korral vastava tunnusega üksikelementide osatähtsus väljavõtukogumis võrdne lihtsa aritmeetilise keskmisega vastavatest osatähtsustest üksikutes seeriates:

$$w_l = \frac{\Sigma w_i}{l},$$

kus w_l on vastava tunnusega elementide osatähtsus väljavõtukogumis;

w_i — vastava tunnusega elementide osatähtsus üksikutes seeriates ($i=1, 2, \ldots, l$);

l — seeriate arv üldkogumis.

Seeriatevaheline dispersioon väljavõtukogumis alternatiivsete tunnuste puhul on väljendatav valemiga:

$$s_l^2 = w_l(1 - w_l).$$

Väljavõtukogumi elementide (seeriate) arv leitakse järgmiste valemitega:

kordumistega väljavõtu korral

$$l = \frac{t^2 s_l^2}{\Delta^2}$$

ja kordumisteta väljavõtu korral

$$l = \frac{t^2 s_l^2 L}{\Delta^2 L + t^2 s_l^2}.$$

Esindusvea leidmisel ebavõrdsete seeriatega väljavõtu puhul tuleb esindusvea valemitesse võetavate suuruste arvulised väärtused leida kaalutud aritmeetiliste keskmistena, kusjuures kaaludeks (sagedusteks) on üksikute seeriate suurus.

Väljavõtukogumisse võetavate seeriate arv leitakse ebavõrdsete seeriate puhul samade valemitega, mis leiavad kasutamist võrdsete seeriate korral.

Seeriaväljavõtu esindusvea arvutamist iseloomustab järgnev näide. Teeninduskombinaatides töötab 80 viieliikmelist rätsepate brigaadi. Rätsepate keskmise töötasu ja juurdelõikaja tööstaaži analüüsimiseks vaadeldi 16 brigaadi andmeid.

Tabel 6.1

Brigaadides töötavate juurdelõikajate tööstaaž, rätsepate keskmine kuupalk ning keskmise kuupalga esindusvea arvutus

Jrk. nr.	Juurdelõikaja tööstaaž (aastates)	Rätsepate keskmine kuupalk (rbl.) $\tilde{x}_i$	$\tilde{x}_i - \bar{\tilde{x}}$	$(\tilde{x}_i - \bar{\tilde{x}})^2$
1	2	3	4	5
1	12	130.—	—5	25
2	15	135.—	0	0
3	10	125.—	—10	100
4	14	140.—	5	25
5	20	160.—	25	625
6	20	155.—	20	400
7	15	145.—	10	100
8	5	125.—	—10	100
9	21	180.—	45	2025
10	15	140.—	5	25
11	16	150.—	15	225
12	5	120.—	—15	225
13	13	130.—	—5	25
14	5	110.—	—25	625
15	8	115.—	—20	400
16	10	125.—	—10	100
Kokku	×	×	×	5025

Vaatlustulemused on toodud tabelis 6.1 veergudes 2 ja 3. Tuleb kindlaks määrata rätsepate keskmise töötasu piirviga tõenäosusega 0,9545. Arvutused on toodud tabeli 6.1 veergudes 4 ja 5.

Rühmadevaheline dispersioon

$$s_l^2 = \frac{\Sigma(\tilde{x}_i - \bar{\tilde{x}})^2}{l} = \frac{5025}{16} = 314{,}1.$$

Esindusviga

$$\mu = \sqrt{\frac{s_l^2}{l}\left(1 - \frac{l}{L}\right)} = \sqrt{\frac{314{,}1}{16} \cdot 0{,}8} = 3{,}963.$$

Piirviga

$\Delta = t \cdot \mu = 2 \cdot 3{,}963 = 7{,}926 \approx 8.$

Tõenäosusega 0,9545 võime väita, et üldkogumis (kõik rätsepad) on keskmine töötasu vahemikus 127 kuni 143 rubla. Vaatlusandmed võimaldavad uurida ka rätsepate keskmise töötasu ja juurdelõikaja tööstaaži korrelatiivset seost.

6.8. KOMBINEERITUD VÄLJAVÕTT

Kombineeritud väljavõtuks nimetatakse astmelist väljavõttu, kus eri astmetel kasutatakse eri väljavõtuviise. Nii näiteks on mõeldav, et üldkogum jaotatakse võrdseteks seeriateks ning seeriad võetakse juhu- või mehaanilise väljavõtuga esimese astme väljavõtukogumisse, esimese astme väljavõtukogumist aga võetakse üksikud elemendid teise astme väljavõtukogumisse puhtakujulise juhuväljavõtuga. Sellisel juhul on tegemist seeria- ja juhuväljavõtu kombineerimisega. Igal astmel tekib oma esindusviga. Üldine keskmine esindusviga leitakse ruutjuurena kõigil järjestikulistel väljavõtuastmetel tekkinud esindusvigade ruutude summast järgmise valemi järgi:

$$\mu = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \mu_i^2},$$

kus μ_i on üksikul astmel tekkinud esindusviga ($i = 1, 2, \ldots, k$);

k — astmete arv.

Igal järgmisel väljavõtuastmel esineb eelmisel astmel saadud väljavõtukogum üldkogumina.

Astmelist väljavõttu võib rakendada ka ilma väljavõtuviise kombineerimata, kasutades kõikidel astmetel sama väljavõtuviisi. Sellist väljavõtuviisi nimetatakse lihtsaks astmeliseks väljavõtuks. Esindusviga on siis samasugune kui sama mahuga üheastmelise väljavõtu korral.

Astmelise väljavõtu peamiseks hüveks on võimalus siduda eri väljavõtutasandeil saadud tulemusi muude meile teada olevate andmetega.

6.9. VÄIKEVÄLJAVÕTT

Mõnel juhul osutub vajalikuks anda üldkogumi parameetrite hinnang väikese väljavõtukogumi alusel. Väikeseks loetakse väljavõtukogumit, mis koosneb kuni 20 elemendist. Ka 20 kuni 30 elemendist koosnevate väljavõtukogumite puhul tuginetakse tavaliselt nendele teoreetilistele seisukohtadele, mis on seotud väikeste kogumite uurimisega.

Suurväljavõtu puhul eeldatakse tõenäosuste normaalset jaotust. Väikeväljavõtu puhul võib selline eeldus tingida olulisi ebatäpsusi. Seetõttu toimub väikeväljavõtu tulemuste hindamine parandatud standardhälbe või dispersiooni ja *Studenti* tõenäosuste jaotuse alusel.

Väikeväljavõtu dispersiooni parandustegur on $\frac{n}{n-1}$. Väikeväljavõtu parandatud dispersioon on seega

$$s_v^2 = s^2 \frac{n}{n-1},$$

kus s^2 on väljavõtukogumi vaatlusandmete alusel leitud dispersioon.

Parandatud standardhälbe s_v võib leida valemiga

$$s_v = s \sqrt{\frac{n}{n-1}},$$

kus s on väljavõtukogumi vaatlusandmete alusel leitud standardhälve.

Siin on valemites toodud väljavõtukarakteristikud s ja s^2, kuna üldkogumi karakteristikute σ ja σ^2 kasutamine on väikeväljavõtu korral praktiliselt täiesti mõeldamatu.

Arvu $n-1$ nimetatakse v a b a d u s a s t m e t e a r v u k s. Vabadusastmete arv vastab nende variantide arvule, mis võivad olla vabalt võetud väärtusega ilma keskmist muutmata.

Väikeväljavõtu e s i n d u s v i g a leitakse valemiga

$$\mu_v = \sqrt{\frac{s_v^2}{n}} = \frac{s_v}{\sqrt{n}}.$$

Selle valemi võib esitada ka teisel kujul

$$\mu_v = \sqrt{\frac{s^2}{n} \cdot \frac{n}{n-1}} = \sqrt{\frac{s^2}{n-1}} =$$

$$= \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n}{n-1}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}}.$$

Väljavõtu piiresindusviga leitakse valemiga

$\Delta_v = t\mu_v$,

kus t on normhälve ehk *Studenti* kriteerium.

N o r m h ä l b e k s nimetatakse väljavõtu- ja üldkeskmise vahe ning väikeväljavõtu esindusvea suhet, s. o.

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{x}}{\mu_i}.$$

Nõukogude statistikakirjanduses tähistatakse tavaliselt t-ga nii eespool käsitletud tõenäosuskordajat kui ka normhälvet. Välismaises kirjanduses nimetatakse tõenäosuskordajat sageli z-k r i t e e r i u m i k s ning normhälvet *Studenti* ehk t-k r i t e e r i u m i k s. Mõlemad kriteeriumid on oma olemuselt väga lähedased. Tähistades $\tilde{x} - \bar{x}$ väikeses väljavõtukogumis tähisega Δ_v, saame

$$t = \frac{\Delta_v}{\mu_v} \quad \text{ja} \quad \Delta_v = t\mu_v.$$

Suurväljavõtu puhul oli analoogiline piirvea valem

$$\Delta = t\mu,$$

millest tuleneb ka ühtse tähise t kasutamine.

Normhälbe t jaotuse formuleeris 1908. aastal inglise matemaatik ja statistik S t u d e n t (pseudonüüm) ning seda hakatigi nimetama *Studenti* jaotuseks. See väljendub valemiga:

$$P_{(t)} = \frac{(n-1)!\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\,(n-1)!\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot$$

$$\cdot \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} = s(t).$$

Studenti jaotuse iseärasuseks on asjaolu, et t väärtuse tõenäosus sõltub vaid kahest suurusest: väljavõtukogumi elementide arvust (n) ja suurusest t. Väljavõtukogumi suurenedes *Studenti* jaotus läheneb normaaljaotusele.

Studenti t jaotuse valemist on võimalik tuletada tõenäosus, millega teatud kindla suurusega väljavõtukogumis t väärtus võib kujuneda väiksemaks kui t_1. Selle sündmuse tõenäosuse tähistame $S(n, t_1)$, seega

$$P[t<t_1]=S(n, t_1).$$

Vastava sündmuse tõenäosuse saab leida nn. *Studenti* integraali valemiga

$$S(n, t_1)=C\int_{-\infty}^{t_1}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)\,dt,$$

kus $$C=\frac{(n-1)!\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\,(n-1)!\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Studenti integraali asemel kasutatakse tavaliselt vastavat tabelit (vt. lisa 11).

Väikeväljavõtuga leitavate karakteristikute arvutamist selgitab näide tellimuste vastuvõtjate töö uurimise kohta. Vaadeldi kaheksa tellimuste vastuvõtja tööd, kusjuures töö mahtu väljendas keskmiselt ühe tunni jooksul vormistatud tellimuste arv. Vaatlustulemused on toodud tabelis 6.2. Kui suur on piirviga üldkogumi keskmise hindamisel väljavõtukogumi keskmisega?

Tabel 6.2

Ühes tunnis vormistatud tellimuste keskmine arv

Tellimuste vastuvõtja	Keskmine vormistatud tellimuste arv tunnis	x^2
I. Kastan	16,5	272,25
M. Haab	16,2	262,44
S. Saar	18,9	357,21
H. Tamm	20,1	404,01
I. Kask	19,3	372,49
K. Pihlak	10,1	102,01
T. Jalakas	12,8	163,84
O. Pärn	15,0	225,00
Kokku	128,9	2159,25

Keskmine vormistatud tellimuste arv tunnis on väljavõtukogumi alusel

$$\bar{x}=\frac{128,9}{8}=16,113\approx 16,1.$$

Dispersioon

$$\sigma^2=\overline{x^2}=\bar{x}^2=\frac{2159,25}{8}-16,113^2=10,277.$$

Standardhälve

$$\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{10,277}=3,2058.$$

Parandusteguriga korrigeeritud standardhälve on seega (nüüd on kasutatud tähist s_v, sest tegemist on väljavõtukogumiga, esialgu olid tähised võetud vastavalt tavalistele dispersiooni ja standardhälbe valemitele σ^2 ja σ):

$$s_v=s\sqrt{\frac{n}{n-1}}=3,2058\sqrt{\frac{8}{8-1}}=3,427.$$

Esindusviga

$$\mu_v = \frac{s_v}{\sqrt{n}} = \frac{3{,}427}{\sqrt{8}} = 1{,}212.$$

Üldkogumi keskmise piiride hindamiseks tõenäosusega 0,960 on *Studenti* kriteerium t vastavalt vabadusastmetele (7) tabeli (vt. lisa 11) järgi 2,6.

Piirviga

$$\Delta = t \cdot \mu = 2{,}6 \cdot 1{,}212 = 3{,}1512 \approx 3{,}2.$$

Üldkogumi keskmise piirid on seega

$$12{,}9 < \bar{x} < 19{,}3 \quad (P = 0{,}960).$$

Küsimuse oleks võinud püstitada ka teisiti. Kui suur on tõenäosus, et üldkogumi keskmine hälbib väljavõtukogumi keskmisest 0,5 tellimuse võrra?

$$t = \frac{\tilde{x} - \bar{x}}{\mu_v} = \frac{0{,}5}{1{,}212} = 0{,}412;$$

$$P[|t| > 0{,}412] = 2[1 - S(0{,}412)].$$

Vastavalt vabadusastmetele (7) on tabeli järgi $S(0{,}4) = 0{,}649$. Järelikult

$$P[|t| > 0{,}412] = 2(1 - 0{,}649) = 0{,}702 \approx 0{,}7.$$

Tõenäosus 0,7 on majanduslike nähtuste uurimisel küllaltki väike. Eespool tõenäosusega 0,96 leitud keskmise piirid on aga liiga suured. Tuleb järeldada, et antud juhul väikeväljavõtt täielikult ei rahulda, kuid annab siiski nähtusest teatava ettekujutuse.

VII KORRELATSIOON JA REGRESSIOON

7.1. KORRELATSIOONI JA REGRESSIOONI MÕISTE

Teadus ja praktika on tõestanud, et ükski nähtus ei esine täiesti isoleeritult. Iga looduslik ja ühiskondlik nähtus on suuremal või väiksemal määral seotud paljude teiste nähtustega. Ühiskondlike nähtuste seosed on väga harva täiesti ranged ehk funktsionaalsed. Nad esinevad enamasti hajuval kujul.

Funktsionaalse seose puhul mingi ühe suuruse (nähtust iseloomustava tunnuse väärtuse) teatud kindlale muutumisele vastab alati teise, temaga seotud suuruse teatud kindel muutumine. Funktsionaalne seos on täheldatav paljude füüsikaliste nähtuste puhul, järelikult ka paljude tehnoloogiliste protsesside juures. Funktsionaalseid seoseid nende puhtal kujul käsitatakse matemaatikas.

Hajuval kujul esinevaid seoseid nimetatakse statistikas korrelatiivseteks. Korrelatsioon tähendab ladina keeles vastastikust seost, sõltuvust (*correlatio*). See ei ole vasturääkiv korrelatsiooni statistilisele mõistele, sest funktsionaalset seost võib käsitada korrelatsiooni eri juhtumina, kus seos on täiesti range. Tavaliselt mõistetakse korrelatsiooni all siiski statistilist tõenäosuslikku seost, mis ei ole rangelt funktsionaalne.

Korrelatiivne on seega selline seos, kus mõju-

rina vaadeldava muutuva suuruse (teguri) mingile väärtusele võib vastata mitu või koguni hulk resultandina vaadeldava muutuva suuruse väärtusi, mis moodustavad jaotusrea, kusjuures need väärtused teguri väärtuse muutudes üldiselt muutuvad.

Korrelatiivsete seoste uurimiseks on matemaatilises statistikas välja töötatud mitmesugused meetodid ning seda osa matemaatilisest statistikast nimetatakse korrelatsiooniteooriaks. Korrelatsiooniteooria käsitleb korrelatsioonanalüüsi ja sellega vahetult seotud regressioonanalüüsi meetodeid. Korrelatsioon- ja regressioonanalüüsi meetodite rakendamise võimalusi majandusteaduses käsitleb statistika üldteooria vastav osa.

Korrelatsioonanalüüsiga tehakse kindlaks seose rangus ja suund, regressioonanalüüsiga seose kuju. Nähtuste või neid iseloomustavate tunnuste vaheliste seoste uurimisel moodustavad need meetodid ühtse terviku, kusjuures rakendatakse ka dispersioonanalüüsi meetodeid.

Paljudel juhtudel võime täheldada nähtuste (tunnuste) vastastikust sõltuvust, kus vaadeldavad nähtused (tunnused) esinevad nii mõjurina kui ka mõjutatavana või nii põhjusena kui ka tagajärjena. Siin on tegemist seosega selle üldises tähenduses.

Sageli on võimalik sedastada vaid ühe nähtuse sõltuvust ühest või mitmest teisest nähtusest, kusjuures vaadeldav mõjustatav nähtus teiste nähtuste, oma mõjurite, suhtes mõjurina ei esine, vähemalt olulisel määral mitte. Üks nähtus või tunnus esineb põhjusena, teine tagajärjena. Elavhõbedasamba kõrgus kraadiklaasis sõltub soojusest, soojus aga elavhõbedasamba kõrgusest ei sõltu. Sellisel juhul on meil tegemist seosega,

mis ei ole vastastikune ning siin on õigem rääkida seosest, mitte sõltuvusest.

Nähtustevaheliste seoste uurimisel korrelatsioon- ja regressioonanalüüsi meetoditega käsitletakse alati üht nähtust mõjutatavana, resultantnähtusena, ning teist nähtust (või teisi nähtusi) mõjurina. Viimaseid nimetatakse ka teguriteks ehk mõjufaktoriteks. Küsimuse matemaatilisel lahendamisel ei ole oluline, kas tegemist on seose või sõltuvusega, mistõttu peaaegu eranditult räägitakse seose uurimisest. See ei tähenda aga seda, et probleemi sisulisel analüüsimisel ei tule vahet teha seose ja sõltuvuse vahel.

Kahe juhusliku suuruse korrelatiivse seose uurimine tugineb üldiselt eeldusel, et vaatlusandmed jaotuvad ühiselt kahemõõtmeliselt normaalselt [8]. See ei tähenda aga sugugi seda, et muudel juhtudel tuleks korrelatsioonanalüüsist loobuda. Tuleb vaid silmas pidada leitavate karakteristikute tinglikkust.

7.2. KORRELATIIVSE SEOSE RANGUS JA SUUND

Seose ranguse hindamiseks kasutatakse korrelatsioonikordajat ehk -koefitsienti või korrelatsiooniindeksit. Korrelatsioonikordaja väärtus muutub vahemikus 0...1. Seos on seda rangem, mida lähem on kordaja väärtus ühele, ja seda lõdvem, mida lähem on see nullile. Täiesti range (funktsionaalse) seose puhul on kordaja väärtus üks. Kui korrelatsioonikordaja väärtus on null, siis antud tingimustes korrelatiivset seost täheldada ei saa. Tinglikkus tuleneb sellest, et uuritavaid nähtusi või ühe nähtuse tunnuseid vaadeldakse kitsendatult, osa mõjuvaid tegureid jääb vaatlemata [11].

Suuna poolest võib seos olla kas võrdeline või pöördvõrdeline. Võrdelise seose puhul ühe muutuva suuruse kasvades kasvab ka teine. Pöördvõrdelise seose puhul ühe muutuva suuruse kasvades teine kahaneb ja vastupidi.

Seose suunda väljendab korrelatsioonikordaja märk. Võrdelise seose puhul on see pluss, pöördvõrdelise puhul miinus.

7.3. KORRELATIIVSE SEOSE KUJU

Korrelatiivse seose kuju all mõistetakse seda tendentsi, mis avaldub uuritava tunnuse väärtuse muutumises seoses tegurtunnuse muutumisega.

Kõige üldisemalt võib seosed liigitada sirgjoonelisteks (lineaarseteks) ja kõverjoonelisteks.

Sirgjooneline korrelatiivne seos on selline seos, kus ühe muutuva suuruse (tunnuse väärtuse) kasvades või kahanedes teine muutuv suurus kasvab või kahaneb ühtlaselt, keskmiselt, kindla väärtuse võrra. Sellise seose (sõltuvuse) korral on uurija eesmärk leida tema analüütiline väljendusvorm sirgjoone võrrandi näol.

Kõverjoonelise seose puhul ühe muutuva suuruse kasvades või kahanedes teine muutuv suurus kasvab või kahaneb ebaühtlaselt, tema analüütiliseks väljendusvormiks on kõverjoon.

Tendentsi iseloomustavat joont nimetatakse regressioonijooneks. Regressioonijoon väljendab uuritava tunnuse sellist muutumist, mis esineks siis, kui teiste tegurite mõju oleks kinnistatud ühele ja samale keskmisele tasemele kõigi vaatlusjuhtumite jaoks ning uuritav tunnus oleks tegurtunnuse funktsioon. Regressioonijoon on

seega teatav abstraktsioon, teatavates tingimustes esineva seose (sõltuvuse) graafiline mudel.

Regressioonijoont saab iseloomustada ka võrrandiga. Võrrand iseloomustab funktsionaalset seost. Korrelatiivse seose puhul on võrrandi kasutamine seose iseloomustamiseks teataval määral tinglik. Siin väljendatakse korrelatiivset seost võrrandiga, mis iseloomustab vaadeldavale korrelatiivsele seosele lähedast funktsionaalset seost. Võrrandi kindlaksmääramisel otsitakse tunnuste empiiriliste väärtuste alusel nende teoreetilisi väärtusi sõltuvalt tegurtunnuse väärtusest. Kõige paremini sobib selleks vähimruutude meetod. Teoreetilise rea hälvete ruutude summa empiirilise rea suhtes peab olema tasandamisel mingi sujuva joonega minimaalne.

Kui funktsionaalse seose võrrand väljendab seose seaduspärasust iga juhtumi jaoks eraldi, siis korrelatiivse seose võrrand väljendab seose seaduspärasust kõigi juhtumite (nähtuste) kohta tervikuna, terve uuritava kogumi kohta. Ekstrapolatsioon regressioonivõrrandi alusel võib viia absurdsuseni, küll aga võib selle alusel teha võrdlusi teiste analoogiliste kogumitega.

7.4. KORRELATIIVSETE SEOSTE LIIGID

Korrelatiivsete seoste olemuse käsitlusest juba selgusid mõned korrelatiivsete seoste liigitused.

Suuna poolest liigitatakse korrelatiivsed seosed võrdelisteks ja pöördvõrdelisteks.

Kuju järgi tehakse vahet sirgjooneliste ja kõverjooneliste seoste vahel. Sirgjooneliste (lineaarsete) seoste analüüsimine korrelatsioon- ja regressioonanalüüsi meetoditega on tunduvalt

lihtsam kui kõverjooneliste seoste analüüsimine. Seetõttu püütakse kasutada sirgjoonelise korrelatsiooni ja regressiooni valemeid ka siis, kui tegelikult esineb väike kõveruse tendents.

Vaadeldavate nähtuste (tunnuste) arvu järgi liigitatakse seosed paaris- ja mitmesteks seosteks. Viimaseid nimetatakse mõnel juhul ka multiseosteks.

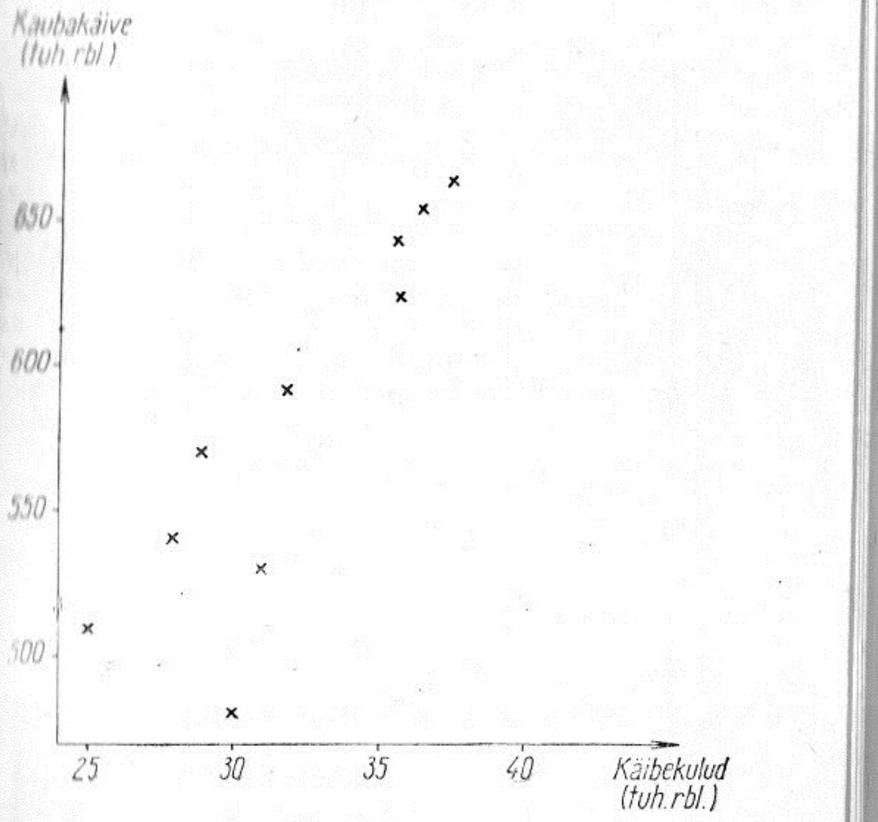
Nii paaris- kui ka mitmeste seoste uurimisel on enamasti (eriti ühiskondlike nähtuste puhul) tegemist vaid nähtuste osalise vaatlusega. Kõiki seotud nähtusi või neid iseloomustavaid tunnuseid ei suudeta korraga vaatlusega hõlmata, vaatluse alla võetakse vaid peamised neist. Seos ülejäänud nähtustega (tunnustega) loetakse mitteoluliseks, arvutustulemuste hindamisel koguni välistatakse.

Mitmese korrelatsiooni puhul on võimalik hinnata nii kõigi vaadeldavate nähtuste (tunnuste) kui ka üksikute nähtuste (tunnuste) vahelist korrelatiivset seost. Vastavalt sellele eristatakse üld- ja osakorrelatsiooni.

Paljude nähtuste puhul ei ole võimalik hõlmata vaatlusega kogu vaadeldava nähtuse elemente. Nähtustevahelisi seoseid tuleb siis hinnata väljavõttelise vaatluse andmete alusel. Seejuures tuleb vahet teha väljavõtukogumis esineva seose ja üldkogumile üldistatava seose karakteristikute vahel.

7.5. KORRELATSIOONIDIAGRAMM

Üks lihtsamaid korrelatiivse paarisseose uurimise võtteid on korrelatsioonidiagrammi koostamine. Korrelatsioonidiagramm on kahemõõtmeline koordinaadistik, kuhu iga



7.1. Kaubakäibe ja käibekulude korrelatsioonidiagramm

üksiknähtus kantakse punktina, mille asukoha määravad uuritavate tunnuste väärtused.

Korrelatsioonidiagrammi koostamist iseloomustab tabelis 7.1 toodud kaubakäibe ja kaubakulude alusel tehtud joonis 7.1.

Tabelis toodud andmete alusel on raske järeldada, et x-i suurenedes y samuti üldiselt suureneb, sest üksikjuhtudel esineb ka y-i väärtuse vähenemist. Kui kanda kõikide variantide väärtused punktidena korrelatsioonidiagrammile (joon.

Tabel 7.1

10 kaupluse kaubakäibe ja käibekulude järjestusnumbrite korrelatsioonikordaja arvutus

Järjekorra-number	Kaubakäive (tuh. rbl.) x	Käibekulud (tuh. rbl.) y	Kaubakäibe järjestus-numbrid	Käibekulude järjestus-numbrid	Järjestus-numbrite vahend d	Järjestus-numbrite vahede ruudud d^2
1	480	30	1	4	—3	9
2	510	25	2	1	1	1
3	530	31	3	5	—2	4
4	540	28	4	2	2	4
5	570	29	5	3	2	4
6	590	32	6	6	0	0
7	620	36	7	7,5	—0,5	0,25
8	640	36	8	7,5	0,5	0,25
9	650	37	9	9	0	0
10	660	38	10	10	0	0
Kokku	$\bar{x}=579$	$\bar{y}=32{,}2$	×	×	×	22,5

7.1), siis ilmneb, et x ja y väärtuste muutumises valitseb võrdeline korrelatiivne seos: x suurenedes suureneb enamasti ka y. Tabelis 7.1. toodud arvandmete alusel on võimalik arvutada ka seose kuju iseloomustava regressioonijoone võrrand (vt. jaot. 7.7) ja selle järgi kanda diagrammile regressioonijoon. Ligilähedase täpsusega on võimalik tõmmata korrelatsioonidiagrammile visuaalne regressioonisirge või -kõver (visuaalne trend). Mida lähemal regressioonijoonele üksikud punktid korrelatsioonidiagrammil asuvad, seda rangem on seos.

Korrelatsiooni uurimisel huvitab meid eelkõige punktide omavaheline asend diagrammiväljal. Seetõttu ei peeta nulljoone märkimist korrelatsioonidiagrammile vajalikuks.

7.6. KORRELATSIOONIKORDAJAD

7.6.1. Järjestusnumbrite korrelatsioonikordaja

Lihtne korrelatiivse seose ranguse ja suuna kindlaksmääramise võte on järjestusnumbrite korrelatsioonikordaja arvutamine. See leitakse valemiga:

$$\varrho = 1 - \frac{6\,\Sigma\, d^2}{n(n^2-1)},$$

kus ϱ on järjestusnumbrite korrelatsioonikordaja;
d — korreleeruvate nähtuste tunnuste väärtuste järjekorranumbrite vahe;
n — andmepaaride arv.

Näitena on arvutatud järjestusnumbrite korrelatsioonikordaja tabelis 7.1 toodud arvandmete alusel.

Järjestusnumbrite korrelatsioonikordaja leidmisel tehakse kõigepealt kindlaks ühe muutuva suuruse (vaadeldava tunnuse) väiksema väärtusega variant ning sellele antakse järjestusnumbriks 1. Teised variandid saavad järgmised järjestusnumbrid kasvavas järjekorras. Samuti nummerdatakse ära ka teise muutuva suuruse variandid. Tulemus ei muutu, kui nummerdamist alustatakse kõige suurematest variantidest, seda muidugi mõlema muutuva suuruse osas. Seejärel arvutatakse järjestusnumbrite vahed ($d=a_x-a_y$), tõstetakse need ruutu ning leitakse ruutude summa (vt. tabel 7.1). Veel tuleb leida andmepaaride arvu ruut (n^2). Nüüd on olemas kõik järjestusnumbrite korrelatsioonikordaja arvutamiseks vajalikud andmed ning selle võib leida eeltoodud valemi alusel:

$$\varrho=1-\frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}=1-\frac{6\cdot 22{,}5}{10(100-1)}=0{,}864.$$

Järjestusnumbrite korrelatsioonikordaja väärtus sõltub ainult uuritavate tunnuste väärtuste vastastikusest järjekorrast. Nende absoluutväärtused korrelatsioonikordaja väärtusele mõju ei avalda. See vähendab järjestusnumbrite korrelatsioonikordaja tunnetuslikku väärtust.

7.6.2. Paariskorrelatsioonikordaja

Eespool toodud järjestusnumbrite korrelatsioonikordaja leitakse kahe muutuva suuruse andmete alusel, kuid ta erineb tunduvalt enamkasutatavast *Braveais'* korrelatsioonikordajast, mida tavaliselt nimetatakse lineaarseks paariskorrelatsioonikordajaks ja tähistatakse tähega r. Selle arvutamise valemi tavaliselt esitatav kuju on:

$$r_{xy}=\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n\sigma_x\sigma_y},$$

kus r_{xy} on korrelatsioonikordaja;
x_i — tunnuse x üksikväärtused;
$\bar{x}$ — tunnuse x keskmine väärtus;
y_i — tunnuse y üksikväärtused;
$\bar{y}$ — tunnuse y keskmine väärtus;
n — andmepaaride arv;
σ_x — tunnuse x väärtuste standardhälve;
σ_y — tunnuse y väärtuste standardhälve.

Korrelatsioonikordaja r valem esitatakse mõnel juhul ka järgmisel kujul:

$$r_{xy}=\frac{\Sigma d_x d_y}{n\sigma_x\sigma_y}=\frac{\Sigma d_x d_y}{\sqrt{d_x^2 d_y^2}},$$

kus d_x on tunnuse x üksikväärtuste hälbed keskmisest väärtusest ($d_x=x-\bar{x}$);
d_y — samad y hälbed ($d_y=y-\bar{y}$).

Sama korrelatsioonikordaja võime leida ka järgmise valemiga:

$$r_{xy}=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sigma_x\cdot\sigma_y},$$

kus $\overline{xy}$ on tunnuste x ja y üksikväärtuste korrutiste keskmine.

Eeltoodud valemi murru lugejat nimetatakse kovariatsiooniks [$cov(x;y)$], samuti korrelatsioonimomendiks.

Kõik kolm esitatud korrelatsioonikordaja valemit annavad hästi edasi selle statistilise karakteristiku olemuse, kuid nende kasutamine korrelat-

sioonikordaja arvutamiseks on tülikas. Arvutamiseks sobib paremini korrelatsioonikordaja valem järgmisel kujul:

$$r_{xy}=\frac{\Sigma xy-\frac{\Sigma x\Sigma y}{n}}{\sqrt{\left[\Sigma x^2-\frac{(\Sigma x)^2}{n}\right]\left[\Sigma y^2-\frac{(\Sigma y)^2}{n}\right]}}.$$

Selle valemi kasutamisel ei ole vaja arvutada aritmeetilisi keskmisi, üksikväärtuste hälbeid keskmistest ja standardhälbeid.

Paariskorrelatsioonikordaja olemuse mõistmist soodustab veel selle järgmine valem:

$$r_{xy}=\overline{t_xt_y}=\frac{\Sigma t_xt_y}{n}=\Sigma\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y_i-\bar{y}}{\sigma_y}\right):n,$$

kus t_x on tunnuse x normhälbed;
t_y — tunnuse y normhälbed.

Paariskorrelatsioonikordaja on seega normhälvete korrutiste keskmine. Normhälvete kaudu kõrvaldatakse tunnuste erinevate mõõtühikute ja suurusjärkude mõju, normhälbed on suhtarvud.

Paariskorrelatsiooni arvutamist tabelis 7.1 toodud arvandmete alusel iseloomustab tabelis 7.2 toodud arvutuskäik.

$\sigma_x=59{,}74;\quad \sigma_y=4{,}142;$

$$r_{xy}=\frac{2162}{10\cdot 59{,}74\cdot 4{,}142}=\frac{2162}{2474}=0{,}874.$$

Paariskorrelatsioonikordaja võime arvutada ka tabelis 7.3 toodud arvutuskäiku kasutades.

$(\Sigma x)^2=5790^2=33\,524\,100;$
$(\Sigma y)^2=322^2=103\,684;$

Tabel 7.2

Paariskorrelatsioonikordaja arvutustabel
(esimese ja teise valemi järgi)

Jrk. nr.	x	$x-\bar{x}$	y	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
1	480	—99	30	—2,2	217,8
2	510	—69	25	—7,2	496,8
3	530	—49	31	—1,2	58,8
4	540	—39	28	—4,2	163,8
5	570	—9	29	—3,2	28,8
6	590	11	32	—0,2	—2,2
7	620	41	36	3,8	155,8
8	640	61	36	3,8	231,8
9	650	71	37	4,8	340,8
10	660	81	38	5,8	469,8
Kokku	$\bar{x}=579$	0	$\bar{y}=32{,}2$	0	2162,0

Tabel 7.3

Paariskorrelatsioonikordaja arvutustabel
(neljanda valemi järgi)

Jrk. nr.	x	y	x^2	y^2	xy
1	480	30	230 400	900	14 400
2	510	25	260 100	625	12 750
3	530	31	280 900	961	16 430
4	540	28	291 600	784	15 120
5	570	29	324 900	841	16 530
6	590	32	348 100	1024	18 880
7	620	36	384 400	1296	22 320
8	640	36	409 600	1296	23 040
9	650	37	422 500	1369	24 050
10	660	38	435 600	1444	25 080
Kokku	5790	322	3 388 100	10540	188 600

Tabel 7.4

Normhälvete ja nende korrutiste arvutus

Jrk. nr.	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$t_x = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x}$	$t_y = \frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y}$	$t_x t_y$
1	—99	—2,2	—1,657	—0,531	0,880
2	—69	—7,2	—1,155	—1,738	2,007
3	—49	—1,2	—0,820	—0,290	0,238
4	—39	—4,2	—0,653	—1,014	0,662
5	—9	—3,2	—0,151	—0,773	0,117
6	11	—0,2	0,184	—0,048	—0,009
7	41	3,8	0,686	0,917	0,629
8	61	3,8	1,021	0,917	0,936
9	71	4,8	1,188	1,159	1,377
10	81	5,8	1,356	1,400	1,898
Kokku	0	0	×	×	8,735

Tabel 7.5

Kudujate jagunemine tööstaaži ja tööviljakuse järgi

Tööviljakus (m/t) \ Tööstaaž (a)	1	2	3	4	5	6	Kokku
9,1—11,1	7	2	1	—	—	—	10
11,1—13,1	14	2	4	1	1	1	23
13,1—15,1	6	4	1	—	—	5	16
15,1—17,1	3	3	3	4	2	1	16
17,1—19,1	2	5	4	3	2	5	21
19,1—21,1	—	1	1	1	3	8	14
Kokku	32	17	14	9	8	20	100

$$r_{xy} = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sqrt{\left[\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right]\left[\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}\right]}} =$$

$$= \frac{188\,600 - \frac{5790 \cdot 322}{10}}{\sqrt{(3388100 - 3352410)\,(10540 - 10368{,}4)}} =$$

$$= \frac{2162}{2474} = 0{,}874.$$

Paariskorrelatsioonikordaja arvutamisel saab kasutada ka eelmistes näidetes toodud arvandmeid:

$$\bar{x}\bar{y} = \frac{188\,600}{10} = 18\,860;$$

$$r_{xy} = \frac{\bar{x}\bar{y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{18\,860 - 579 \cdot 32{,}2}{59{,}74 \cdot 4{,}142} =$$

$$= \frac{216{,}2}{247{,}4} = 0{,}874.$$

Eeltoodud arvnäited kinnitavad, et eespool toodud valemid on samaväärsed. Valemi valik oleneb lähteandmetest ja arvutaja harjumusest.

Paariskorrelatsioonikordaja arvutamist normhälvete kaudu iseloomustavad sama kaubakäibe ja käibekulude korrelatsiooni arvnäite andmed (tabel 7.1). Arvutuskäik on toodud tabelis 7.4.

$\sigma_x = 59{,}74;$

$\sigma_y = 4{,}142;$

$$r_{xy} = \frac{\sum t_x t_y}{n} = \frac{8{,}735}{10} = 0{,}8735 \approx 0{,}874.$$

7.6.3. Korrelatsioonikordaja leidmine korrelatsioonitabeli andmetel

Seose uurimise üks lihtsamaid meetodeid on vaatlusandmete rühmitamine ja nende esitamine tabelites. Eriti häid tulemusi annab ühe kogumi elementide rühmitamine üheaegselt mitme tunnuse järgi. Sellist rühmitamist nimetatakse kombineeritud rühmitamiseks ja vastavate andmete tabeleid kombinatsioontabeliteks. Kombinatsioontabelite eriliigi moodustavad kahe tunnuse järgi rühmitamisel saadavad risttabelid. Viimaseid nimetatakse ka korrelatsioonitabeliteks, sest nende alusel on võimalik teha järeldusi korrelatiivsete seoste kohta (vt. tabel 7.5).

Korrelatsioonitabeli andmetel leitakse korrelatsioonikordaja järgmise valemiga:

$$r=\frac{\frac{\Sigma d_x d_y f_{xy}}{n}}{\sigma_x \sigma_y}=\frac{\Sigma d_x d_y f_{xy}}{n\sigma_x \sigma_y},$$

kus r on korrelatsioonikordaja;
d_x — tunnuse x hälbed keskmisest;
d_y — tunnuse y hälbed keskmisest;
f_{xy} — sagedused tunnuste x ja y järgi;
n — kogumi elementide arv;
σ_x — tunnuse x standardhälve;
σ_y — tunnuse y standardhälve.

Arvutuste lihtsustamiseks on otstarbekas leida hälbed mitte tegeliku, vaid tingliku (vabalt valitud) keskmise suhtes ning intervallitud rühmade puhul jagada intervalli pikkusega. Sellisel juhul valem omandab järgmise kuju:

$$r=\frac{\frac{\Sigma d'_x d'_y f_{xy}}{n}-c'_x c'_y}{\sigma'_x \sigma'_y}=\frac{\Sigma d'_x d'_y f_{xy}-nc'_x c'_y}{n\sigma'_x \sigma'_y},$$

kus d'_x on tunnuse x intervalli pikkusega k jagatud hälbed tinglikust keskmisest a_x;
d'_y — tunnuse y samasugused hälbed:
f_{xy} — sagedused tunnuste x ja y järgi;
n — kogumi elementide arv;
c'_x — tunnuse x intervalli pikkusega k jagatud esimest järku tingmoment;
c'_y — tunnuse y samasugune tingmoment;
σ'_x — tunnuse x intervalli pikkusega k jagatud standardhälve;
σ'_y — tunnuse y samasugune standardhälve;
k — intervalli pikkus.

Seega

$$d'_x=\frac{x_i-a_x}{k_x},$$

$$d'_y=\frac{y_i-a_y}{k_y},$$

$$c'_x=\frac{\Sigma d'_x f_x}{\Sigma f_x},$$

$$c'_y=\frac{\Sigma d'_y f_y}{\Sigma f_y},$$

$$\sigma'_x=\sqrt{\frac{\Sigma d'^2_x f_x}{\Sigma f_x}-c'^2_x}$$ ja

$$\sigma'_y=\sqrt{\frac{\Sigma d'^2_y f_x}{\Sigma f_x}-c'^2_y}.$$

Tabel 7.6

Korrelatsioonikordaja leidmiseks vajalike suuruste arvutused

y intervallina	y intervalli keskmine	x					f_y	d'_y	d'^2_y	$d'_y f_y$	$d'^2_y f_y$
		1	2	3	4	5					
9,1—11,1	10,1	7(28)	2(4)	1	—	—	10	—2	4	—20	40
11,1—13,1	12,1	14(28)	2(2)	4	1(−1)	1(−2)	23	—1	1	—23	23
13,1—15,1	14,1	6	4	1	—	—	16	0	0	0	0
15,1—17,1	16,1	3(−6)	3(−3)	3	4(4)	2(4)	16	1	1	16	16
17,1—19,1	18,1	2(−8)	5(−10)	4	3(6)	2(8)	21	2	4	42	84
19,1—21,1	20,1	—	1(−3)	1	1(3)	3(18)	14	3	9	42	126
f_x		32	17	14	9	8	100	Kokku		57	289
d'_x		—2	—1	0	1	2	Kokku				
d'^2_x		4	1	0	1	4	9	3	60	4	
$d'_x f_x$		—64	—17	0	9	16	180	60	366		
$d'^2_x f_x$		128	17	0	9	32					

Korrelatsioonikoefitsiendi leidmiseks vajalikud arvutused on otstarbekas koondada võimaluse piires tabelisse (vt. tabel 7.6).

Kõikides intervallides on leitud intervalli keskmine. Tinglikuks keskmiseks a_x on võetud 3 aastat. Tinglikuks keskmiseks a_y on võetud 14,1 m/t.

$$c'_x = \frac{\Sigma d'_x f_x}{\Sigma f_x} = \frac{4}{100} = 0{,}04;$$

$$c'_y = \frac{\Sigma d'_y f_y}{\Sigma f_y} = \frac{57}{100} = 0{,}57;$$

$$\sigma'_x = \sqrt{\frac{\Sigma d'^2_x f_x}{\Sigma f_x} - c'^2_x} = \sqrt{\frac{366}{100} - 0{,}04^2} = 1{,}91;$$

$$\sigma'_y = \sqrt{\frac{\Sigma d'^2_y f_y}{\Sigma f_y} - c'^2_y} = \sqrt{\frac{289}{100} - 0{,}57^2} = 1{,}60.$$

Korrutised $d'_x d'_y f_{xy}$ on toodud tabelis sulgudes sageduste f_{xy} juures. Tööstaažile 1 aasta ja keskmisele tööviljakusele 10,1 m/t vastab sagedus $f_{xy}=7$, $d_x=-2$ ja $d_y=-2$, $d'_x d'_y f_{xy}=(-2)(-2)\cdot 7=28$, $\Sigma d'_x d'_y f_{xy}=174$. Selle summa leidmisel on otstarbekas liita enne kõik positiivsed arvud, siis negatiivsed ja leida nende vahe.

$$r = \frac{\Sigma d'_x d'_y f_{xy} - n c'_x c'_y}{n \sigma'_x \sigma'_y} = \frac{174 - 100 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}57}{100 \cdot 1{,}91 \cdot 1{,}60} = 0{,}562.$$

Selgub, et kudujate tööviljakuse ja tööstaaži vahel on võrdeline korrelatiivne seos, mis ei ole küll eriti range.

7.6.4. Kvalitatiivsete tunnuste korrelatsioonikordajad

Kvalitatiivsete tunnuste korrelatsiooni hindamine on raskem kui kvantitatiivsete tunnuste korrelatsiooni hindamine, sest selleks ei ole küllaldaselt meetodeid. Mõned nendest leiavad siiski edukat kasutamist.

Alternatiivsete tunnuste puhul kasutatakse seose ranguse hindamiseks korrelatsioonikordaja teisendatud kuju, mida nimetatakse kontingentsuskordajaks. Valem on järgmine:

$$r_k = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(b+d)(a+c)(c+d)}},$$

kus r_k on kontingentsuskordaja;

a, b, c ja d — jaotustabeli ruudud (lahtrid) vastavalt joonisele 7.2.

Mõnedes käsiraamatutes nimetatakse seda ka assotsiatsioonikordajaks [12]. Prof.

c	d
a	b

7.2. Alternatiivse jaotustabeli ruutude tähised

Tabel 7.7

Tööliste jagunemine tehnilise hariduse ja normide täitmise alternatiivsete tunnuste järgi

Haridus \ Normide täitmine	Täidavad norme	Ei täida norme	Kokku
Tehnilise haridusega	*a* 112	*b* 19	131
Tehnilise hariduseta	*c* 15	*d* 52	67
Kokku	127	71	198

N. K. Družinin aga nimetab assotsiatsioonikordajaks järgmist koefitsienti [13]:

$$r_a = \frac{ad - bc}{ad + bc},$$

kus a, b, c ja d on jaotustabeli ruudud (lahtrid) vastavalt joonisele 7.2.

Ülaltoodud kordajate arvutamist iseloomustab järgnev näide (tabel 7.7).

$$r_k = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(b+d)(a+c)(c+d)}} =$$

$$= \frac{112 \cdot 52 - 19 \cdot 15}{\sqrt{(112+19)(19+52)(112+15)(15+52)}} =$$

$$= \frac{5539}{9537} = 0{,}58.$$

Kontingentsuskordaja kinnitab seost tehnilise hariduse ja normide täitmise vahel.

Assotsiatsioonikordaja osutub käesoleval juhul tunduvalt suuremaks:

$$r_a=\frac{112\cdot 52-19\cdot 15}{112\cdot 52+19\cdot 15}=\frac{5539}{6109}=0{,}91.$$

Mõnede autorite järgi on kontingentsuskordaja küllalt hea, kui ta on üle 0,3.

7.7. REGRESSIOONISIRGE VÕRRAND

Seose ranguse ja suuna kõrval on oluline kindlaks määrata ka seose kuju. Seda iseloomustab regressioonijoon või sellele vastav regressioonivõrrand, mis on regressioonijoone matemaatiline mudel. Regressioonijoon võib olla sirge või kõver. Sirgjoonelise regressiooni analüüsimine on tunduvalt lihtsam kui kõverjoonelise regressiooni analüüsimine, mistõttu igal võimalikul juhul püütakse eeldada sirgjoonelist regressiooni ja alles siis, kui selle eeldamine on väheusaldatav, minnakse üle kõverjoonelise regressiooni analüüsimisele.

Regressioonisirgeks nimetatakse statistikas sirgjoont, mida kasutatakse ühe muutuja (y) hindamiseks teise (x) järgi vastavalt võrrandile:

$$y=a+bx,$$

kus a ja b on võrrandi parameetrid.

Seose uurimisel omab parameeter b erilist tähtsust. See on x-i proportsionaalsuse koefitsient, mis näitab, mitme ühiku (või osa) võrra muutub y kui x muutub ühiku võrra. Pöördvõrdelise seose puhul on b miinusmärgiga. Parameetrile a ei ole võimalik anda sisulist tõlgendust, ta lihtsalt näitab regressioonijoone algpunkti koordinaatide süsteemi.

Matemaatiliselt on meil sirgjoonelise seose puhul tegemist aritmeetilise progressiooniga.

Võrrandid iseloomustavad tegelikult funktsionaalset seost. Korrelatiivse seose uurimisel seatakse eesmärgiks leida selline funktsionaalse seose vormi võrrand, mis kõige paremini väljendaks korrelatiivse seose kuju. x ja y empiiriliste väärtuste alusel otsitakse y teoreetilisi väärtusi sõltuvalt x väärtustest. Seda võimaldab tasandamine sirgega vähimruutude meetodil.

Vähimruutude meetodi põhiolemus seisneb sellise teoreetilise rea leidmises, mille väärtuste ja y empiiriliste väärtuste suhtes leitud hälvete ruutude summa on minimaalne. Selliseid sirgeid saab olla vaid üks. Igasuguse teise sirge hälvete ruutude summa on suurem.

Võrrandi parameetrite leidmiseks lahendatakse nn. normaalvõrrandite süsteem:

$$\begin{cases}\Sigma y=an+b\,\Sigma x\\ \Sigma xy=a\,\Sigma x+b\,\Sigma x^2.\end{cases}$$

Näitena on leitud regressioonisirge tabeli 7.1 andmete alusel.

$\Sigma x=5790;$
$\Sigma y=322;$
$\Sigma x^2=3\,388\,100;$
$\Sigma xy=188\,600.$

Võrrandisüsteem on järgmine:

$$\begin{cases}322=10a+5790b\\ 188\,600=5790a+3\,388\,100b.\end{cases}$$

Võrrandisüsteemi lahendamine annab järgmised parameetrid:

Tabel 7.8

10 kaupluse kaubakäive ning tegelikud ja teoreetilised käibekulud

Jrk. nr.	Kaubakäive (tuh. rbl.) x	Käibekulud (tuh. rbl.) y	Käibekulude regression kaubakäibe järgi (tuh. rbl.) y_t
1	480	30	26,2
2	510	25	28,0
3	530	31	29,2
4	540	28	29,8
5	570	29	31,7
6	590	32	32,9
7	620	36	34,7
8	640	36	35,9
9	650	37	36,5
10	660	38	37,1
Kokku	5790	322	322

$a=-2{,}8758$;
$b=0{,}0606$.

Regressioonivõrrand on antud juhul:

$$y=-2{,}8758+0{,}0606x.$$

Regressioonivõrrandi alusel on võimalik leida y regressioon x järgi, y teoreetilised väärtused y_t (vt. tabel 7.8).

Regressioonikordaja b ja korrelatsioonikordaja r vahel on järgmine seos:

$$b_{y/x}=r_{yx}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}.$$

Eelmise näite andmete alusel ($r=0{,}874$, $\sigma_y=4{,}14$ ja $\sigma_x=59{,}74$) on võimalik seda kontrollida:

$$b_{y/x}=0{,}874\,\frac{4{,}14}{59{,}74}=0{,}0606.$$

Regressioonikordaja saab leida ka korrelatsioonikordajat arvutamata. Sel juhul on regressioonikordaja valem järgmine:

$$b_{y/x}=\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n\sigma_x^2}=\frac{\Sigma xy-\frac{\Sigma x\,\Sigma y}{n}}{\Sigma x^2-\frac{(\Sigma x)^2}{n}}.$$

Kasutades sama ülesande andmeid (lähteandmed tabelis 7.1) on arvutus järgmine:

$$b_{y/x}=\frac{188\,600-\frac{5790\cdot 322}{10}}{3\,388\,100-3\,352\,410}=0{,}0606.$$

Regressioonivõrrandi parameetri a saab leida normaalvõrrandite süsteemi esimese võrrandi $\Sigma y=an+b\Sigma x$ järgi. Võrduse mõlema poole jagamisel n-ga omandab võrrand järgmise kuju:

$$\bar{y}=a+b\bar{x}.$$

Seega

$$a=\bar{y}-b\bar{x}.$$

Käesolevas punktis kasutatud näite puhul on

$$a=32{,}2-0{,}0606\cdot 579=-2{,}8874.$$

Väike erinevus eespool arvutatud a-ga ($-2{,}8758$) on tingitud sellest, et regressioonikordaja $b=0{,}0606$ on ümardamise tulemusena tegelikust regressioonikordajast veidi suurem.

Regressioonivõrrandi parameetri a ja seejärel ka y teoreetilised väärtused saab kindlaks määrata ka järgmise lahenduskäiguga. Võrrandisüsteemi esimeses võrrandis x asendatakse hälvetega keskmisest:

$$\Sigma y = an + b\,\Sigma(x-\bar{x}).$$

Kuna $\Sigma(x-\bar{x})=0$, siis sellise asenduse korral

$$a=\frac{\Sigma y}{n}=\bar{y}.$$

Regressioonivõrrand omandab järgmise kuju:

$$y=\bar{y}+b\,(x-\bar{x}).$$

Käesolevas punktis kasutatava näite puhul on regressioonivõrrand järgmine:

$$y=32{,}2+0{,}0606\,(x-\bar{x}).$$

Hälbed $(x-\bar{x})$ on toodud tabelis 7.2. Võib veenduda, et y esimene teoreetiline väärtus on

$$y=32{,}2+0{,}0606\,(-99)=26{,}2.$$

Sama väärtus on esimesel teoreetilisel y-l ka tabelis 7.8.

Kuna regressioonikordaja b saab leida korrelatsioonikordaja kaudu, siis on võimalik ka vastupidine arvutus:

$$r_{yx}=b_{y/x}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}.$$

Kasutatava näite puhul on arvutus järgmine:

$$r_{yx}=0{,}0606\,\frac{59{,}74}{4{,}14}=0{,}874.$$

Regressioonikordaja ja korrelatsioonikordaja seos lubab nimetada viimast standardiseeritud regressioonikordajaks.

7.8. KORRELATSIOONIINDEKS

Korrelatsioonikordajat kasutatakse seose ranguse hindamiseks ainult lineaarse seose puhul. Üldisem seose ranguse näitaja on korrelatsiooniindeks:

$$R=\sqrt{1-\frac{\sigma^2_{(y-y_t)}}{\sigma^2_y}},$$

kus R on korrelatsiooniindeks;

$\sigma^2_{(y-y_t)}$ — jääkdispersioon;

σ^2_y — y empiiriliste väärtuste dispersioon.

Jääkdispersioon iseloomustab y empiiriliste ja teoreetiliste väärtuste hälvete dispersiooni.

Kehtib seos:

$$\sigma^2_y=\sigma^2_{y_t}+\sigma^2_{(y-y_t)},$$

kus σ^2_y on y empiiriliste väärtuste dispersioon;

$\sigma^2_{y_t}$ — y teoreetiliste väärtuste dispersioon.

$\sigma^2_{(y-y_t)}$ — jääkdispersioon.

Korrelatsiooniindeks on tuletatud tuginedes eeltoodud võrrandile seoste intensiivsuse näitajast, teoreetilisest korrelatsioonisuhtest η.

$$\eta=\sqrt{\frac{\sigma^2_{y_t}}{\sigma^2_y}}.$$

Korrelatsiooniindeksi R ja teoreetilise korrelatsioonisuhte η arvutamist iseloomustab järgnev arvnäide (vt. tabel 7.9, lähteandmed tabelis 7.1).

Tabel 7.9

Korrelatsiooniindeksi arvutustabel

Jrk. nr.	y	$y-\bar{y}$	$(y-\bar{y})^2$	y_t	$y_t-\bar{y}$	$(y_t-\bar{y})^2$	$y-y_t$	$(y-y_t)^2$
1	30	—2,2	4,84	26,2	—6,0	36,00	3,8	14,44
2	25	—7,2	51,84	28,0	—4,2	17,64	—3,0	9,00
3	31	—1,2	1,44	29,2	—3,0	9,00	1,8	3,24
4	28	—4,2	17,64	29,8	—2,4	5,76	—1,8	3,24
5	29	—3,2	10,24	31,7	—0,5	0,25	—2,7	7,29
6	32	—0,2	0,04	32,9	0,7	0,49	—0,9	0,81
7	36	3,8	14,44	34,7	2,5	6,25	1,3	1,69
8	36	3,8	14,44	35,9	3,7	13,69	0,1	0,01
9	37	4,8	23,04	36,5	4,3	18,49	0,5	0,25
10	38	5,8	33,64	37,1	4,9	24,01	0,9	0,81
Kokku	322	0	171,60	322	0	131,58	0	40,78

$\bar{y}=32{,}2$;

$\sigma_y^2=\frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n}=\frac{171{,}60}{10}=17{,}16$;

$\sigma_{y_t}^2=\frac{\Sigma(y_t-\bar{y})^2}{n}=\frac{131{,}58}{10}=13{,}158$;

$\sigma_{y-y_t}^2=\frac{\Sigma(y-y_t)^2}{n}=\frac{40{,}78}{10}=4{,}078$;

$R=\sqrt{1-\frac{4{,}078}{17{,}16}}=0{,}873$;

$\eta=\sqrt{\frac{13{,}158}{17{,}16}}=0{,}876$.

Korrelatsiooniindeksi R ja teoreetilise korrelatsioonisuhte η väike erinevus korrelatsioonikordajast (0,874) tuleneb ilmselt y teoreetiliste väärtuste leidmisel tehtud ümardamistest. See ilmneb ka sellest, et $\sigma_{y_t}^2+\sigma_{y-y_t}^2=13{,}158+4{,}078=17{,}226$, peaks aga olema 17,16.

7.9. ELASTSUSKORDAJA

Regressioonikordaja b on nimeline suurus ja väljendab y absoluutset muutumist vastavalt x muutumisele. Sageli on aga vaja iseloomustada suhtelist muutumist. Selleks kasutatakse elastsuskordajat. Keskmine elastsuskordaja leitakse valemiga:

$$E=b\frac{\bar{x}}{\bar{y}_t},$$

kus E on elastsuskordaja;
b — regressioonikordaja;

$\bar{x}$ — tunnuse x keskmine väärtus;
$\bar{y}_t$ — tunnuse y teoreetiliste väärtuste keskmine.

Vaadeldud kaubakäibe ja käibekulude (tabel 7.1) puhul on keskmine elastsuskordaja

$$E = b\frac{\bar{x}}{\bar{y}_t} = 0{,}0606\ \frac{579}{32{,}2} = 1{,}0897.$$

Siit järeldub, et kaubakäibe suurenemisel 1 protsent käibekulud suurenevad keskmiselt 1,09 protsenti.

Elastsuskordajat kasutatakse peamiselt kaupade ja teenuste nõudluse ja tarbimise uurimisel.

7.10. DETERMINATSIOONIKORDAJA

Determinatsioonikordajaks nimetatakse korrelatsioonikordaja, korrelatsiooniindeksi või teoreetilise korrelatsioonisuhte ruutu. Seega:

$d = r^2$, $d = R^2$ ja $d = \eta^2$,

kus d on determinatsioonikordaja;
r — korrelatsioonikordaja;
R — korrelatsiooniindeks;
η — teoreetiline korrelatsioonisuhe.

Tunnetuslikult iseloomustab determinatsioonikordajat kõige paremini teoreetilise korrelatsioonisuhte ruut:

$$d = \eta^2 = \frac{\sigma^2_{y_t}}{\sigma^2_y}.$$

Vastavalt sellele on determinatsioonikordaja kahe dispersiooni suhe. Murru lugejas toodud dispersioon $\sigma^2_{y_t}$ väljendab «avaldatud» varieerumist ja nimetajas toodud dispersioon σ^2_y üldist varieerumist. Determinatsioonikordaja näitab, missugune osa üldvariatsioonist on seotud nähtusega, mida antud juhul vaadeldakse argumendina.

Mõnede ülesannete lahendamisel on determinatsioonikordaja kasutamine mugavam kui korrelatsioonikordaja kasutamine.

VIII AEGREAD

Ühiskondlikud nähtused muutuvad ajaliselt, nad on dünaamilised. Materiaalseid väärtusi toodetakse ja kulutatakse pidevalt muutuval hulgal. Muutub ka töötajate arv nii ettevõtetes kui ka kogu rahvamajanduses. Tehnika ja töö parema organiseerimise tulemusena kasvab tööviljakus.

Majanduslikke nähtusi iseloomustatakse nende tunnuste väärtustega teataval momendil või perioodil. Mitme momendi või perioodi andmed moodustavad andmete rea (järjendi, jada), mis võimaldab hinnata selle nähtuse muutumist ajas. Mõnel juhul on võimalik teha järeldusi nähtuse ajalise muutumise intensiivsuse ja üldise arengutendentsi kohta juba pealiskaudselgi tutvumisel rea liikmetega. Tavaliselt eeldab nähtuse ajalise muutumise uurimine siiski spetsiaalsete meetodite rakendamist, aegridade analüüsimist.

8.1. AEGREA MÕISTE JA AEGRIDADE LIIGITUS

Aegreaks nimetatakse nähtuse ajalist muutumist iseloomustavate arvandmete rida. Aegridu nimetatakse teisiti ka kronoloogilisteks ehk dünaamikaridadeks. Eestikeelses tõlkekirjanduses on neid nimetatud ka dünaamilisteks ridadeks. See on aga ebasoovitatav, sest siin vaadeldud read ainult väljendavad dünaamikat, olles ise aga muutumatud (s. t. mittedünaamilised).

Aegrea elemendid on nähtust iseloomustava tunnuse väärtused ning neile vastavad ajamomendid või perioodid. Ühe nähtuse iseloomustamisel mitme tunnuse läbilõikes tekib niisama palju aegridu kui on uurimisega hõlmatud tunnuseid.

Aegread on kõrvuti variatsioonridadega statistiliste ridade tähtsamaid põhiliike.

Aegread liigitatakse moment- ja perioodridadeks. Nende range eristamine on oluline eeskätt keskmiste arvutamisel.

Nähtuse tunnuse iseloomu järgi aegread liigitatakse veel absoluut- ja suhtarvude ning keskmiste ridadeks. Aegridade analüüsimisel arvutatavad suhtarvud moodustavad uue, lähtereast erineva aegrea.

8.1.1. Momentread

Momentrida on aegrida, mille iga element on seotud teatud ajamomendiga — kuupäevaga, mingi aasta alguse või lõpuga jne. Momentrea näiteks on andmed Eesti NSV rahvaarvu kohta [14] (tabel 8.1).

Momentrea oluliseks iseärasuseks on asjaolu, et nähtust iseloomustava tunnuse väärtuste

Tabel 8.1

Eesti NSV rahvaarv (praegustes piirides)

Kuupäev	1. I 1940	1. I 1950	1. I 1955	1. I 1960	1. I 1965	1. I 1970
Rahvaarv (tuh.)	1054,4	1096,7	1157,3	1209,1	1284,8	1356,1

summal ei ole reaalset sisu. Nii näiteks ei ole mingit mõtet tabelis 8.1 toodud rahvaarvude liitmisel saadud summal.

8.1.2. Perioodread

Perioodrida on aegrida, mille iga element on seotud mingi ajavahemikuga, perioodiga (kuu, kvartal, aasta). Neid ridu nimetatakse mõnel juhul ka intervallridadeks.

Perioodridu võib liigitada pidevateks ja sõredateks.

Pidevate perioodridade perioodid järgnevad vahetult üksteisele. Pideva perioodrea näiteks on andmed ettevõtte «K» kaubatoodangu kohta 1976. aastal kvartalite lõikes (tabel 8.2).

Pideva perioodrea elementide väärtuste summal on majanduslik sisu — nad väljendavad sama tunnuse väärtust pikema perioodi kohta.

Tabel 8.2

Ettevõtte «K» kaubatoodang 1976. aastal (milj. rbl.).

Kvartal	I	II	III	IV
Kaubatoodang	24,2	25,0	30,0	31,8

Tabel 8.3

Eesti NSV riigieelarve tulud (milj. rbl.)

Aasta	1945	1950	1960	1965	1968	1969	1970
Tulud	57,8	118,3	349,2	479,5	581,2	627,8	707,7

Tabelis 8.2 toodud nelja kvartali kaubatoodangute summa on ettevõtte «K» kaubatoodang 1976. aastal.

Sõredates (ehk vahemlikes) perioodridades on tunnuse väärtused perioodide kohta, mis ei järgne vahetult üksteisele. Sõredate perioodridade perioodid võivad olla eraldatud üksteisest korrapäraste, s. t. võrdsete intervallidega või hoopis suvaliselt võetud intervallidega. Sõreda perioodrea näiteks on andmed Eesti NSV riigieelarve tulude kohta (tabel 8.3), kus perioodidevahelised intervallid on 5, 10, 5, 3, 1 ja 1 aasta [14].

Sõreda perioodrea elementide väärtuste summa ei ole mõtestatud (võrdle momentreaga).

8.2. AEGREA ELEMENTAARKARAKTERISTIKUD

Majanduslike nähtuste ajalise muutumise uurimisel võib eristada kahte astet:

1) aegridade elementaaranalüüs,
2) üldise arengutendentsi uurimine.

Elementaaranalüüs seisneb aegridade lihtsamate karakteristikute arvutamises. Sellised karakteristikud on: absoluutne juurdekasv, kasvutempo, juurdekasvutempo, keskmine kasvutempo ja keskmised. Täiendava karakteristikuna kasutatakse veel ühele juurdekasvuprotsendile osanevat absoluutset juurdekasvu. Nende karakteristikute abil on võimalik anda nähtuse muutumise üldine iseloomustus. Lihtsamate aegridade puhul on arvutatud karakteristikute abil võimalik teha järeldusi ka üldise arengutendentsi kohta. Pikemate ja keerulisemate aegridade puhul tuleb aga üldise arengutendentsi hindamiseks kasutada eri meetodeid.

Majandusalastes kirjutistes ja käsiraamatutes

piirdutakse tavaliselt eespool märgitud aegridade karakteristikutega. Aegridade põhjalikuma analüüsimise näidetega võib kohtuda peamiselt spetsiaalsetes uurimistöödes.

8.2.1. Absoluutne juurdekasv

Nähtuste (täpsemalt väljendatult nähtusi iseloomustavate tunnuste väärtuste) absoluutset muutumist iseloomustab aegrea kahe elemendi väärtuse v a h e. Seda nimetatakse absoluutseks juurdekasvuks. Absoluutne juurdekasv võib olla ka negatiivne ning iseloomustada seega tunnuse väärtuse vähenemist ehk kahanemist.

Pikemate aegridade puhul võib absoluutse juurdekasvu leida eelneva või mingi teise aluseks (baasiks) võetud elemendi väärtusega võrreldes.

Aegrea elemendi väärtust nimetatakse majandusalases kirjanduses sageli ka t a s e m e k s ja absoluutset juurdekasvu iseloomustatakse kui kahe absoluutse taseme vahet. Ehkki absoluutne tase on võrdlemisi üldkasutatav, on ta siiski mittesoovitatav. Otstarbekam on piirduda sellega, et nimetada tasemeteks ainult nn. suhtelisi tasemeid.

Absoluutne juurdekasv aegrea eelmise elemendi väärtusega võrreldes ehk nn. a h e l j u u r d e k a s v (d^a) leitakse valemiga:

$$d^a = y_t - y_{t-1},$$

kus y_t on aegrea elemendi väärtus vaadeldaval momendil (perioodil);

y_{t-1} — aegrea elemendi väärtus eelmisel momendil (perioodil).

Absoluutne juurdekasv mingi varasema baa-

Tabel 8.4

Kolhoosi «N» kartulisaak aastatel 1970—1977 ning selle juurdekasvud aastatel 1971—1977

Aasta	Kartulisaak (tonnides)	Absoluutsed juurdekasvud (tonnides)	
		Eelmise aastaga võrreldes (aheljuurdekasvud)	1970. a. võrreldes (alusjuurdekasvud)
1970	400	—	—
1971	450	50	50
1972	370	—80	—30
1973	520	150	120
1974	550	30	150
1975	570	20	170
1976	580	10	180
1977	600	20	200
Kokku	×	200	×

siks võetava väärtusega võrreldes (d^b) ehk nn. a l u s j u u r d e k a s v leitakse valemiga:

$$d^b = y_t - y_1,$$

kus y_1 on aegrea elemendi väärtus baasiks võetaval momendil (perioodil).

Absoluutsete juurdekasvude arvutamist selgitab näide kolhoosi «N» kartulisaagi kohta aastatel 1970—1977 (tabel 8.4).

Viimase aasta absoluutne alusjuurdekasv on võrdne kõigi aheljuurdekasvude summaga. See iseloomustab absoluutset juurdekasvu kogu vaadeldaval perioodil.

Absoluutne juurdekasv võib olla ka n e g a t i i v n e ning väljendada nähtust iseloomus-

tava tunnuse (aegrea elemendi) väärtuse vähenemist. Tabelis 8.4 on selle näiteks saagi vähenemine 1972. aastal.

Absoluutsete juurdekasvude reast ei piisa alati. Tihtipeale on vaja uurida ka nähtuse suhtelist muutumist.

8.2.2. Kasvutempo

Kasvutempo on nähtust iseloomustava tunnuse (resp. aegrea elemendi) vaadeldava momendi (perioodi) väärtuse ja mingi eelmise momendi (perioodi) väärtuse suhe.

Kasvutempo on aegridade spetsiifiline näitarv (vene keeles *темп роста*, saksa keeles *Wachstumstempo*). Statistika üldteooria teistes osades, näiteks indeksiteoorias, nimetatakse kasvutempot indeksiks. Indeksi ja tempo vahel ei ole sisulist vahet. Kasvutempo on lihtindeks.

Kasvutempot nimetatakse kirjanduses vahel ka kasvukoefitsiendiks. Mõned autorid on püüdnud termineid «*indeks*» ja «*koefitsient*» piiritleda nii: vahetu suhtena arvutatud suhtarv on koefitsient (kasvutempo), protsentides väljendatult aga indeks. Seda siiski ei saa pidada õigustatuks. Mõiste sisu ju ei muutu. Erinevate nimetuste kasutamist samade näitarvude kohta võib seletada vaid kui teatavat traditsiooni.

Kasvutempo võib leida kas eelmise momendi (perioodi) või mingi muu aluseks (baasiks) võetud momendi (perioodi) suhtes. Vastavalt sellele eristame ahel- ja aluskasvutempot (vrd. ahel- ja alusindeksid, vt. jaot. 9.2). Nende selgitamisel ongi otstarbekas kasutada indeksiteoorias kasutatavaid mõisteid ja tähiseid.

Ahelindeks (i^a) leitakse valemiga:

$$i^a = \frac{y_t}{y_{t-1}},$$

kus y_t on aegrea elemendi väärtus vaadeldaval momendil (perioodil);
y_{t-1} — aegrea elemendi väärtus eelmisel momendil (perioodil).

Alusindeks (i^b) leitakse valemiga:

$$i^b = \frac{y_t}{y_1},$$

kus y_1 on aegrea elemendi väärtus baasimomendil (-perioodil).

Kui $i > 1$, siis on meil tegemist sõna otseses mõttes kasvu tempoga. Kui aga kasvutempo $i < 1$, siis nähtust iseloomustava tunnuse väärtus

Tabel 8.5

Kolhoosi «N» kartulisaak aastatel 1970—1977 ning selle kasvutempod aastatel 1971—1977

Aasta	Kartulisaak (tonnides)	Kasvutempod			
		Ahelindeksitena		Alusindeksitena	
		vahetute suhetena	protsentides	vahetute suhetena	protsentides
1970	400	—	—	—	—
1971	450	1,125	112,5	1,125	112,5
1972	370	0,822	82,2	0,925	92,5
1973	520	1,405	140,5	1,300	130,0
1974	550	1,058	105,8	1,375	137,5
1975	570	1,036	103,6	1,425	142,5
1976	580	1,018	101,8	1,450	145,0
1977	600	1,034	103,4	1,500	150,0

on vähenenud ning tegemist on kahanemise tempoga.

Kasvutempo (ehk indeks) võib olla väljendatud nii vahetu suhtena kui ka protsentides või promillides. Viimasel juhul korrutatakse vahetu suhtena leitud kasvutempo vastavalt 100 või 1000-ga.

Kasvutempode arvutamist selgitab tabel 8.4 andmete alusel toodud näide (tabel 8.5).

Ahelindeksite korrutis annab viimase alusindeksi. Tabelis 8.5 toodud ahelindeksite korrutis annab seega viimase aasta alusindeksi. Seda on eriti oluline teada keskmise kasvutempo arvutamisel.

Lünklike aegridade täiendamiseks on oluline teada ka seda, et mistahes perioodi (momendi) ahelindeks võrdub sama perioodi alusindeksi ja eelmise perioodi alusindeksi jagatisega.

8.2.3. Juurdekasvutempo

Kasvutempo kõrval kasutatakse nähtuste ajalise muutumise intensiivsuse iseloomustamiseks ka juurdekasvutempot, mis on absoluutse juurdekasvu ning selle arvutamisel aluseks võetud aegrea elemendi väärtuse suhe. Juurdekasvutempo võib leida nii aegrea eelmise elemendi kui ka mingi teise aluseks võetud elemendi suhtes. Vastavalt sellele eristame ahel- ja alusjuurdekasvutempot.

Aheljuurdekasvutempo (j^a) leitakse valemiga:

$$j^a = \frac{d^a}{y_{t-1}},$$

kus d^a on absoluutne juurdekasv aegrea eelmise elemendi väärtusega võrreldes;

y_{t-1} — aegrea elemendi väärtus eelmisel momendil (perioodil).

Alusjuurdekasvutempo (j^b) leitakse valemiga:

$$j^b = \frac{d^b}{y_1},$$

kus d^b on absoluutne juurdekasv aegrea baasielemendi väärtusega võrreldes;

y_1 — aegrea elemendi väärtus baasimomendil (-perioodil).

Juurdekasvutempo võib nagu kasvutempogi väljenduda nii vahetu suhtena kui ka protsentides või promillides. Viimasel juhul vahetu suhtena

Tabel 8.6

Kolhoosi «N» kartulisaak aastatel 1970—1977 ning selle juurdekasvutempod aastatel 1971—1977

Aasta	Kartulisaak (tonnides)	Juurdekasvutempod			
		Eelmise aasta suhtes (aheljuurdekasvutempod)		1970. aasta suhtes (alusjuurdekasvutempod)	
		vahetute suhetena	protsentides	vahetute suhetena	protsentides
1970	400	—	—	—	—
1971	450	0,125	12,5	0,125	12,5
1972	370	—0,178	17,8	—0,075	—7,5
1973	520	0,405	40,5	0,300	30,0
1974	550	0,058	5,8	0,375	37,5
1975	570	0,036	3,6	0,425	42,5
1976	580	0,018	1,8	0,450	45,0
1977	600	0,034	3,4	0,500	50,0

arvutatud juurdekasvutempo korrutatakse 100 või 1000-ga.

Juurdekasvutempode arvutamist iseloomustab tabel 8.4 andmete alusel tabelis 8.6 toodud näide.

Kui kasvutempo on juba leitud, siis võib juurdekasvutempo leida *lahutades kasvutempost* vastavalt 1,0, 100% või 1000‰. Analoogiliselt võib juurdekasvutempo alusel leida kasvutempo liites 1,0, 100% või 1000‰ (vrd. tabeleid 8.5 ja 8.6).

Juurdekasvutempo võib olla negatiivne. Seda siis, kui absoluutne juurdekasv on negatiivne (tabelis 8.6 real 3).

Juurdekasvutempost rääkides tuleb *protsendi mõistet* kasutada korrektselt. Kui aruandeperioodil toodeti ettevõttes 300 tonni lõnga, baasiperioodil aga 200 tonni, siis võib ütelda kas «juurdekasvutempo on 50 protsenti» või «toodang on suurenenud 50 protsenti», ei saa aga ütelda, et «toodang suurenes 50 protsendi võrra». Toodetakse ju lõnga, mitte protsente [15].

Majandusalastes kirjutistes on sageli juttu *majanduse arengust*. Seda võidakse iseloomustada kas absoluutarvude või suhtarvude — kasvu- ja juurdekasvutempoga. Seejuures ei tohi kasvutempot kasutada juurdekasvutempo tähenduses. See on *elementaarne viga*, ka siis kui üldine tekst iseloomustab majandusliku arengu suunda ja suurust niivõrd selgelt, et terminoloogiline eksitus jääb märkamatuks. Sama terminoloogiline viga võib aga põhjustada mõnel juhul ka informatsiooni *väärat* tõlgendamist. Väide, et toodangu kasvutempo on 5 protsenti, tähendab, et toodang väheneb 95 protsenti. Seda esineb üliharva, enamasti on tegu väära sõnastusega. Kirjutaja mõtleb, et toodangu juurdekasvutempo on

5%, nagu tulekski väljenduda (võiks öelda ka «toodang kasvas 5%»).

Kui aga väidetakse, et toodangu kasvutempo on 105 protsenti, sellal kui 105 protsenti on hoopis toodangu juurdekasvutempo, siis on küll tegemist *olulise eksitusega*. Tegelik kasvutempo on ju 205 protsenti! Kiiresti arenevate tootmisharude puhul on selline kasvutempo täiesti mõeldav. Lugeja või kuulaja võib aga saada kirjeldatavast majanduslikust nähtusest hoopis väära ettekujutuse.

Eespool toodud tabelites 8.4, 8.5 ja 8.6 on aegridade karakteristikute veergudes *ühe võrra vähem* elemente kui analüüsitavas aegreas. Seda asjaolu on oluline silmas pidada. Mida tähendab näiteks väide, et toote «A» toodangu juurdekasvutempo on viisaastakul 75 protsenti? Kui on teada, et viisaastaku viimasel aastal toodeti seda toodet 350 miljonit tonni, kas võib siis leida nende andmete põhjal viisaastaku esimese aasta toodangu? *I.* Viisaastaku juurdekasvutempo arvutatakse viisaastakule eelneva aasta suhtes, peab ta ju

Tabel 8.7

Ühe juurdekasvuprotsendi absoluutväärtuste arvutus

Aasta	1970	1971	1972	1973	1974
d^a	100	200	200	250	250
j^a (%)	10	18	15,4	16,7	14,3
$A = \frac{d^a}{j^a}$	10,0	11,1	13,0	15,0	17,5

hõlmamä ka viisaastaku esimese aasta juurdekasvutempot. Toodud andmete põhjal võib järelikult leida viisaastaku esimesele aastale eelneva aasta toodangu, mis oli 350 : 1,75=200 tonni. Siit järeldub, et nähtuse ajalise muutumise intensiivsuse iseloomustamiseks tuleb teada vastava tunnuse väärtust ka käsitletavale ajavahemikule e e l n e v a l aastal.

Majandusliku nähtuse mahu suurenedes osutub tempo pidev suurendamine ja mõnigi kord ka selle säilitamine raskeks. Nähtuse ajalise muutumise intensiivsust iseloomustavad suhtarvud (eelmise elemendi väärtuse suhtes) muutuvad seetõttu järk-järgult väiksemaks. Siit ei saa aga teha järeldust, et viimaste perioodide tulemused on ka absoluutselt halvemad kui eelmistel perioodidel. Objektiivse hinnangu võib anda arvutades j u u r d e k a s v u t e m p o ü h e l e p r o t s e n d i l e o s a n e v a a b s o l u u t s e j u u r d e k a s v u (Δ). Näide selle kohta on tabelis 8.7.

Vaatamata juurdekasvutempo vähenemisele 1972. ja 1974. aastal on ühele jurdekasvuprotsendile osanev absoluutne juurdekasv pidevalt suurenenud.

8.2.4. Keskmine kasvutempo

Uuritava nähtuse ajalise muutumise keskmise intensiivsuse iseloomustamiseks leitakse k e s k m i n e k a s v u t e m p o. Keskmine kasvutempo $\bar{i}$ arvutatakse a h e l i n d e k s i t e (ahelkasvutempode) g e o m e e t r i l i s e k e s k m i s e n a:

$$\bar{i}=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} i_k^a}=\sqrt[n]{i_1^a \cdot i_2^a \cdot \ldots \cdot i_n^a},$$

kus i_k^a on ahelindeksid (ahelkasvutempod).

Valemi kasutamine ülaltoodud kujul on arvutustehniliselt küllaltki tülikas, mistõttu seda kasutatakse enamasti logaritmitud kujul:

$$\lg \bar{i}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log i_k^a.$$

Viimasel kujul nimetatakse geomeetrilist keskmist ka l o g a r i t m k e s k m i s e k s. Eespool toodud kolhoosi «N» kartulisaagi (tabelid 8.4, 8.5 ja 8.6) keskmise kasvutempo leiame järgmiselt:

$$\bar{i}=$$
$$=\sqrt[7]{1{,}125\cdot 0{,}822\cdot 1{,}405\cdot 1{,}058\cdot 1{,}036\cdot 1{,}018\cdot 1{,}034}=$$
$$=\sqrt[7]{1{,}5}=1{,}06.$$

Keskmise kasvutempo arvutamine geomeetrilise keskmise valemi järgi on otstarbekas siis, kui kõik kasvutempod (ahelindeksitena) on e e l n e v a l t arvutatud. Kui aga lähteandmeteks on absoluutarvud või mingi baaselemendi väärtuse suhtes arvutatud kasvutempod (alusindeksid), siis pole ei tavaline geomeetriline ega logaritmkeskmine otstarbekas, sest see eeldab kõigi ahelkasvutempode leidmist.

Ahelindeksitena arvutatud kasvutempode k o r r u t i s on viimane kasvutempo alusindeksina. See omakorda pole midagi muud kui aegrea viimase ja esimese elemendi väärtuse jagatis. Seega saab aegrea keskmise kasvutempo leida kahe nimetatud absoluutväärtuse alusel. See on geomeetrilise keskmise arvutamise l i h t s a m e r i j u h t u m:

$$\bar{i}=\sqrt[t-1]{\frac{y_t}{y_1}},$$

kus $\bar{i}$ on keskmine kasvutempo;
y_t — aegrea viimase elemendi absoluutväärtus;
y_1 — aegrea esimese elemendi absoluutväärtus;
t — elementide arv aegreas.

Antud juhtumil leitakse $(t-1)$-juur, geomeetrilise keskmise arvutamisel tavaliste valemite järgi aga n-juur. Siin tähistab n kasvutempode arvu, t aga absoluutväärtuste arvu. Esimesi on alati ühe võrra vähem, $n=t-1$.

Eelmises näites arvutatud keskmise kasvutempo võiksime siis leida ka järgmiselt:

$$\bar{i}=\sqrt[8-1]{\frac{600}{400}}=\sqrt[7]{1{,}5}=1{,}06.$$

Keskmise kasvutempo leidmisel selle valemiga mingi eelnevalt kindlaks määratud pikema perioodi kohta (näiteks viisaastaku kohta) tuleb rangelt jälgida, et murru nimetajas oleks selle perioodi esimese elemendi väärtusele eelneva elemendi väärtus. Viisaastaku aasta keskmise kasvutempo arvutamisel tuleb murru nimetajasse võtta viisaastakule eelneva aasta absoluutne näitaja.

8.2.5. Aegrea elementide keskmised

Aegridade iseloomustamisel on sageli vaja arvutada aegrea elementide keskmine väärtus. Selle arvutamisel kasutatav keskmine oleneb aegrea liigist.

Momentrea andmetel ei saa arvutada aritmeetilist keskmist, ainuõige on siin kronoloogiline keskmine:

Tabel 8.8

Kombinaadi «K» töötajate nimestikuline arv 1976. aasta I poolaastal

Kuupäev	1. I	1. II	1. III	1. IV	1. V	1. VI	1. VII
Töötajate arv	410	415	430	420	420	460	460

$$\bar{y}_k=\frac{\frac{y_1}{2}+y_2+\ldots+y_{t-1}+\frac{y_t}{2}}{t-1},$$

kus y_i on aegrea elementide väärtused,
t — aegrea elementide arv (ka ajamomentide arv).

Kronoloogilise keskmise kohta lähemalt vt. jaot. 3.5.

Näitena kombinaadi «K» töötajate keskmise nimestikulise arvu leidmine 1976. aasta I ja II kvartalis tabelis 8.8 toodud andmete alusel.

$$\bar{y}_{I\,kv}=\frac{\frac{205}{2}+415+430+\frac{210}{2}}{3}=420$$

$$\bar{y}_{II\,kv}=\frac{\frac{210}{2}+420+460+\frac{230}{2}}{3}=440.$$

Kolmest alamperioodist (kuust) koosnevat perioodi (kvartalit) iseloomustava momentrea elementide keskmise väärtuse leidmiseks vajatakse andmeid nelja momendi kohta. Aasta keskmise leidmiseks vajatakse seega 13 momendi andmeid — iga kuu esimese kuupäeva ja järgmise aasta 1. jaanuari kohta.

Perioodrea andmetel arvutatakse lihtne aritmeetiline keskmine:

$$\bar{y}=\frac{\Sigma y_i}{t},$$

kus y_i on aegrea elementide väärtused

$$(i=1, 2, \ldots, t);$$

t — perioodide (intervallide arv).

Aritmeetilise keskmise kohta lähemalt vt. jaot. 3.1.

Eelmises näites leitud töötajate keskmine nimestikuline arv I ja II kvartalis moodustab kahe elemendiga perioodrea. Töötajate keskmise nimestikulise arvu I poolaastal võib seega leida aritmeetilise keskmisena

$$\bar{y}=\frac{420+440}{2}=430.$$

Juhul kui töötajate keskmist nimestikulist arvu I ja II kvartalis poleks eelnevalt leitud, siis tulnuks töötajate keskmine nimestikuline arv esimesel poolaastal leida kronoloogilise keskmise valemi järgi.

8.3. ÜLDISE ARENGUTENDENTSI ISELOOMUSTAMINE

Nähtuse üldise arengutendentsi (ingl. k. *trend*) all mõistetakse eelkõige nähtuse arenemise suunda — nähtust iseloomustava tunnuse väärtuste suurenemist või kahanemist. Paljude nähtuste puhul saab arengutendentsi üldise iseloomustuse anda juba aegrea elementaaranalüüsi alusel. Sageli on aga selleks vaja eri meetodite rakendamist, seda eriti siis, kui arengutendentsile tahetakse anda matemaatiline hinnang.

Nähtuse tunnuse väärtused kujunevad pikemas ajavahemikus paljude eri tegurite mõjul. Need tegurid mõjuvad sageli erinevas suunas ja on erisuguse mõjujõuga ning tunnuse väärtused hälbivad suuremal või vähemal määral neist väärtustest, mis vastavad üldisele arengutendentsile. Seetõttu osutubki üldise arengutendentsi hindamine sageli raskendatuks.

Nähtuse üldine arengutendents ei tarvitse olla pidevalt tõusev või langev. Ta võib väljenduda ka kõverana. See raskendab arengutendentsi hindamist veelgi.

Statistika üldteoorias on välja töötatud rida nähtuste üldise arengutendentsi uurimise meetodeid. Üks lihtsamaid üldise arengutendentsi uurimise meetodeid on aegridade esitamine arvjoonistena. Üldist arengutendentsi iseloomustatakse arvutuslikult aegridade teisendamise teel, mida nimetatakse ka ridade tasandamiseks. Kasutatavamaid aegridade tasandamise viise on tasandamine vähimruutude meetodil.

8.3.1. Aegread arvjoonistena

Arvjoonis on alati ilmekam kui algandmete rida või read. Sellelt võib jämedates joontes kindlaks määrata aegrea peamised karakteristikud, nähtuse ajalise muutumise üldtendentsi ning hooajalised võnked. Nii saadud järeldused ei ole aga alati kvantitatiivselt väljendatavad, nad on enamasti ligikaudsed. Kui arvjoonistest siiski ei piisa nähtuse ajalise muutumise iseloomustamiseks, siis tuleb kasutada muid aegridade analüüsimise meetodeid.

Arvjooniseid on lühidalt käsitletud jaot. 1.13.

Põhjalikumalt on neid käsitlenud L. Mendel ja U. Mereste raamatus «Arvjoonised» [3].

8.3.2. Aegridade tasandamine

Aegridade tasandamine on üldise arengutendentsi uurimise põhimeetod. Tasandamisel moodustatakse uus sujuv aegrida, mis võimalikult hästi iseloomustab üldist arengutendentsi. Aegridade tasandamise meetodid jagunevad:

1) mehaanilise tasandamise meetodid,
2) analüütilise tasandamise meetodid.

Mehaanilise tasandamise põhimeetodid on:

1) aegridade koondamine,
2) tasandamine libiseva keskmisega.

Analüütilise tasandamise meetodid jagunevad:

1) tasandamine sirgega,
2) tasandamine kõverjoonega (parabooliga, hüperbooliga).

Aegridade analüütilise tasandamise meetodid tuginevad vähimruutude meetodile, mis võimaldab leida kõige sobivama teoreetilise rea joone valemi. Kas tasandusjooneks valida sirge või mõni kõver, seda saab otsustada nn. diferentside meetodi abil.

Perioodrea koondamisel rühmitatakse selle perioodid ümber pikemateks perioodideks ning rea elementide kohta arvutatakse absoluutväärtused (või keskmised) uue jaotusega perioodidel.

Nii näiteks võivad ettevõtte kuutoodangud üldist tendentsi mitte kajastada, sellal kui kvartalitoodangud seda kajastavad. Tabelis 8.9 on toodud

Tabel 8.9

Ettevõtte «Z» toodang 1976. a. (tuh. rbl.) **kuude lõikes**

Kuu	Toodang	Kuu	Toodang
Jaanuar	230	Juuli	280
Veebruar	190	August	240
Märts	220	September	260
Aprill	250	Oktoober	290
Mai	240	November	300
Juuni	270	Detsember	260

Tabel 8.10

Ettevõtte «Z» toodang 1976. a. (tuh. rbl.) **kvartalite lõikes**

	I kv.	II kv.	III kv.	IV kv.
1	2	3	4	5
Kvartalitoodang	640	760	780	850
Keskmine kuutoodang	213	253	260	283

Tabel 8.11

Ettevõtte «M» käibevahendite varud 1976. aasta I poolaastal (tuh. rbl.)

Kuupäev	1.I	1. II	1. III	1. IV	1. V	1. VI	1. VII
Käibevahendite varu	314	310	330	326	330	330	334

ettevõtte «Z» kuutoodangud 1976. aastal. Tabelis 8.10 on need andmed koondatud kvartaliandmete reaks, milles on kvartalitoodangu absoluutväärtused ja keskmine kuutoodang kvartalis. Koondatud rea andmetel kujuneb toodangu üldisest arengutendentsist tunduvalt ülevaatlikum pilt.

Momentrea elemente ei saa liita. Siin tuleb rea koondamisel piirduda keskmiste arvutamisega. Tabelis 8.11 on toodud ettevõtte «M» käibevahendite varud 1976. aasta I poolaastal. Selle rea koondamiseks tuleb arvutada käibevahendite varude kronoloogilised keskmised I ja II kvartalis.

I kvartali käibevahendite keskmine varu on 320, II kvartali varu 330 tuh. rbl. Nii kujunes esialgsest momentreast kaheelemendiline perioodrida. Uus rida iseloomustab käibevahendite keskmise varu suurenemist, mis lähtereast otseselt ei selgu.

Rea tasandamisel libiseva keskmisega arvutatakse rea elementide väärtuste keskmised pikemate ajavahemike kohta, kusjuures iga järgmise keskmise arvutamisel osa rea elemente jäetakse arvutusest välja ning osa elemente võetakse juurde. Leitud keskmistest saadakse uus rida, mis on $n-1$ elemendi võrra lühem kui algandmete rida, kus n on elementide arv libisevate keskmiste arvutamisel.

Rea lühenemist tasandamisel libiseva keskmise meetodil empiirilise (tegeliku) reaga võrreldes peetakse selle meetodi oluliseks puuduseks.

Libisev keskmine arvutatakse lihtsa aritmeetilise keskmise valemiga:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}.$$

Aegreas $y_1, y_2, y_3 \ldots y_m$ leitakse kolme elemendi libisev keskmine järgmiselt:

Tabel 8.12

Ettevõtte «K» toodang 1976. aastal ja libiseva keskmisega tasandatud kuutoodangute read

Kuu	Toodang (tuh. rbl.)	Libisev keskmine	
		3 elemendi kaupa	5 elemendi kaupa
1	2	3	4
Jaanuar	230	—	—
Veebruar	190	210	—
Märts	210	200	216
Aprill	200	220	218
Mai	250	230	226
Juuni	240	240	234
Juuli	230	240	248
August	250	250	244
September	270	250	252
Oktoober	230	260	260
November	280	260	—
Detsember	270	—	—

$$\bar{y}_1 = \frac{y_1+y_2+y_3}{3};$$

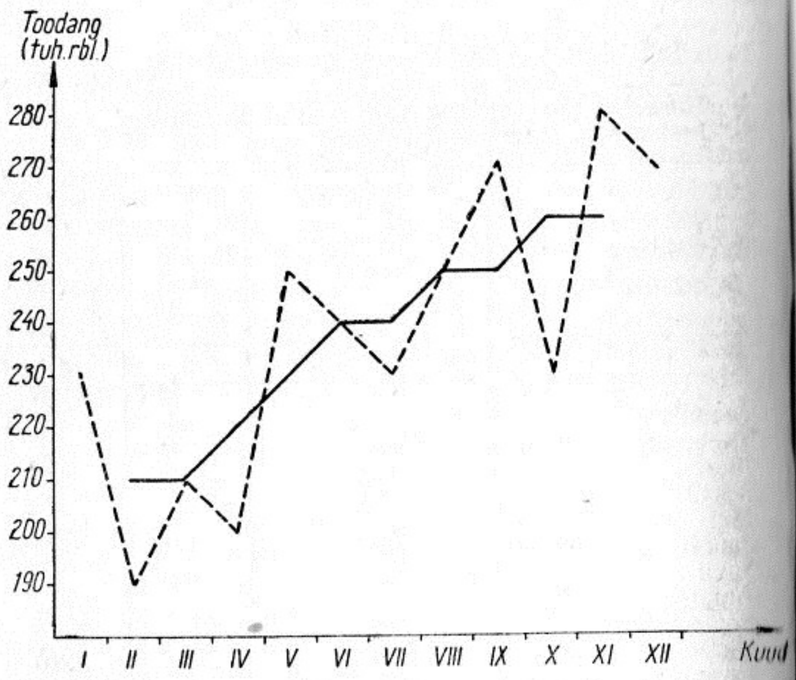
$$\bar{y}_2 = \frac{y_2+y_3+y_4}{3};$$

. . . . . .

$$\bar{y}_{m-2} = \frac{y_{m-2}+y_{m-1}+y_m}{3}.$$

Libiseva keskmisega hõlmatavat osaperioodide arvu nimetatakse libisemissammu pikkuseks.

Aegridade tasandamist libiseva keskmisega iseloomustab tabelis 8.12 toodud näide. Tabeli veerus 2 on toodud andmed ettevõtte «K» toodangu kohta 1976. aastal. Need andmed ei anna aga selget ülevaadet toodangu üldisest arengutendentsist. Tabeli veergudes 3 ja 4 on arvutatud libi-



Joon. 8.1. Ettevõtte «K» empiiriline ja teoreetiline toodang 1976. aastal

sev keskmine vastavalt kolme ja viie elemendi kaupa, millest ilmneb üldine kasvutendents tunduvalt selgemini.

Libiseva keskmise meetodi kasutamine on otstarbekas pikkade ridade puhul. Lühikestes ridades mõjub tasandatud rea lühenemine empiirilise reaga võrreldes eriti häirivalt.

Aegridade analüüsimisel libiseva keskmise meetodil annab väga häid tulemusi empiirilise ja tasandatud (teoreetilise) rea kõrvutamine arvjoonisel. Joonisel 8.1 on esitatud tabelis 8.12 toodud tegelikud andmed ja tasandatud rea (3 elemendi kaupa) andmed.

Libiseva keskmise arvutamisel võib kasutada

ka sellist meetodit, kus keskmisele liikmele antakse suurem kaal. Selliselt arvutatud keskmist nimetatakse kaalutud libisevaks keskmiseks. Kui keskmine liige võtta kahekordse kaaluga, siis tuleks kolmeliikmeliste rühmade keskmised arvutada valemiga:

$$\bar{y}_i = \frac{y_{i-1} + 2y_i + y_{i+1}}{n}, \text{ kus } n = 4.$$

Analoogiliselt tuletatakse valemid ka teistsuguste kaalutud libisevate keskmiste arvutamiseks. Kui kolmeliikmeliste rühmade puhul äärmised liikmed võtta kahekordselt ja keskmine liige kolmekordselt, siis $n = 7$.

Aegridade analüütiline tasandamine tugineb vähimruutude meetodile. Vähimruutude meetod on tegelike suuruste või funktsiooni parima lahendi leidmise viis vaatlusandmete kogumi alusel. Statistikas kasutatakse seda funktsiooni leidmiseks, mis tasandamisel võimalikult vähe erineks empiirilistest andmetest. See kehtib ka aegridade tasandamise kohta.

Moodustagu aegrea elemendid tunnuse y väärtuste rea

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n,$$

mis vastavad teatavatele ajamomentidele või -perioodidele

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n.$$

Vähimruutude meetodit kasutatakse funktsiooni $y = f(x)$ leidmiseks, kusjuures funktsiooni arvutuslike ehk teoreetiliste väärtuste

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n)$$

ja empiiriliste väärtuste

$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$

hälvete ruutude summa peab olema minimaalne, s.o.

$$S=\sum_{i=1}^{n}[y_i-f(x_i)]^2=\min.$$

Meetodi konkreetses rakendamises on erinevusi olenevalt funktsiooni iseloomust (kas see vastab sirgele, teist järku paraboolile või mõnele muule kõverale). Sobiva tasandusfunktsiooni iseloomu leidmist soodustab diferentside ehk vahede meetod.

Diferentsid ehk vahed on järgmised seosed:

$\Delta f(x_n)=f(x_{n+1})-f(x_n)$;
(esimest järku diferents);

$\Delta^2 f(x_n)=\Delta f(x_{n+1})-\Delta f(x_n)$;
(teist järku diferents);

$\Delta^k f(x_n)=\Delta^{k-1} f(x_{n+1})-\Delta^{k-1} f(x_n)$;
(k-ndat järku diferents),

kus $x_n=x_0+nh$; h on konstant ja n on täisarv.

Tabel 8.13

Funktsiooni $f(x)$ diferentsid

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
0	1				
		2			
1	3		2		
		4		6	
2	7		8		0
		12		6	
3	19		14		0
		26		6	
4	45		20		
		46			
5	91				

Diferentsidega uuritakse funktsioone diskreetsete argumentide korral. Eeldades, et kahe järjestikulise x vahe on 1 ning teades funktsiooni $f(x)$ väärtusi, saame tabelis 8.13 toodud diferentsid.

Diferentside meetodit võib kasutada aegrea uurimisel, võttes argumendiks aja ja funktsiooniks sellele vastavad elementide väärtused. Kasutades omadust, mille järgi n-astme funktsiooni puhul $n+1$ ja kõrgemat järku diferentsid on võrdsed nulliga ja n-järku diferentsid konstantsed, võib diferentside analüüsimise alusel teha järeldusi teatavat liiki valemite sobivuse kohta aegrea üldise arengutendentsi kindlaksmääramiseks. Lineaarfunktsioon sobib juhul, kui esimest järku diferentsid on püsivad ja teist järku diferentsid on nullid. Teist järku parabool sobib tasanduskõveraks, kui teist järku diferentsid on püsivad ning kolmandat järku diferentsid võrduvad nulliga. Kolmandat järku parabool sobib, kui kolmandat järku diferentsid on püsivad ja 4-ndat järku diferentsid on nullid jne.

Diferentsi ja tuletise vahel on teatav analoogia. Üleminek diferentsidelt tuletistele toimub järgmise valemi järgi:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^n f(x)}{h^n}=f^{(n)}(x),$$

kus h on kahe naaberargumendi väärtuse vahe.

Tasandamisel sirgega leitakse aegrea elementide sujuvalt muutuvad väärtused eeldusel, et nad muutuvad mööda sirget

$$y_t=a_0+a_1 t,$$

kus y_t on võrrandi järgi leitud elementide väärtused;

a_0 ja a_1 — võrrandi parameetrid, mis leitakse vähimruutude meetodil;

t — aeg.

Tasandamist sirgega on õige kasutada siis, kui absoluutsed juurdekasvud on püsivad. Võrrandi parameetrite arvutamise lihtsuse tõttu kasutatakse seda meetodit ka siis, kui absoluutsed juurdekasvud ei ole täiesti püsivad (või on seda vaid tinglikult).

Võrrandi parameetrid a_0 ja a_1 leitakse võrrandisüsteemi järgi:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \Sigma t = \Sigma y \\ a_0 \Sigma t + a_1 \Sigma t^2 = \Sigma yt. \end{cases}$$

Kui $\Sigma t = 0$, siis $a_0 = \frac{\Sigma y}{n}$ ja $a_1 = \frac{\Sigma yt}{\Sigma t^2}$,

kus n on aegrea elementide arv.

Tasandamist sirgega iseloomustab tabelis 8.14 toodud näide kolhoosi «N» teraviljasaagikuse aegrea tasandamise kohta. Veergudes 3—5 on toodud võrrandi parameetrite leidmiseks vajalikud arvutused. Veerus 6 on saagikuse teoreetilised väärtused (y_t).

$$a_0 = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{160}{8} = 20{,}0; \quad a_1 = \frac{\Sigma yt}{\Sigma t^2} = \frac{31{,}2}{168} = 0{,}18;$$

$$y_t = 20{,}00 + 0{,}18t.$$

Ülesande lahendamisel on kasutatud arvutusvõtet, mille juures t_0 viiakse rea keskele. Kuna reas on paarisarv elemente, siis t_0 on tinglikult kahe aasta vahel, mistõttu kõik täisaastad tähistatakse paaritute arvudega üle ühe.

Empiirilist ja teoreetilist aegrida on soovitatav võrrelda arvjoonisel. Tabelis 8.14 esitatud saagikuse tegelikke ja teoreetilisi väärtusi on võrreldud joonisel 8.2.

Tabel 8.14

Kolhoosi «N» teraviljasaagikuste aegrea tasandamine sirgega

Aasta	Saagikus y	t	t^2	yt	y_t
1970	18,5	—7	49	—129,5	18,74
1971	19,7	—5	25	—98,5	19,10
1972	18,3	—3	9	—54,9	19,46
1973	20,5	—1	1	—20,5	19,82
1974	20,4	1	1	20,4	20,18
1975	21,4	3	9	64,2	20,54
1976	19,2	5	25	96,0	20,90
1977	22,0	7	49	154,0	21,26
Kokku	160,0	0	168	31,2	160,0

Tasandamisel paraboliga leitakse aegrea elementide sujuvalt muutuvad väärtused eeldusel, et nad muutuvad paraboolselt.

Parabool võib olla teist, kolmandat jne. järku. Võrrandid on vastavalt järgmised:

teist järku parabool — $y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$

kolmandat järku parabool — $y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$

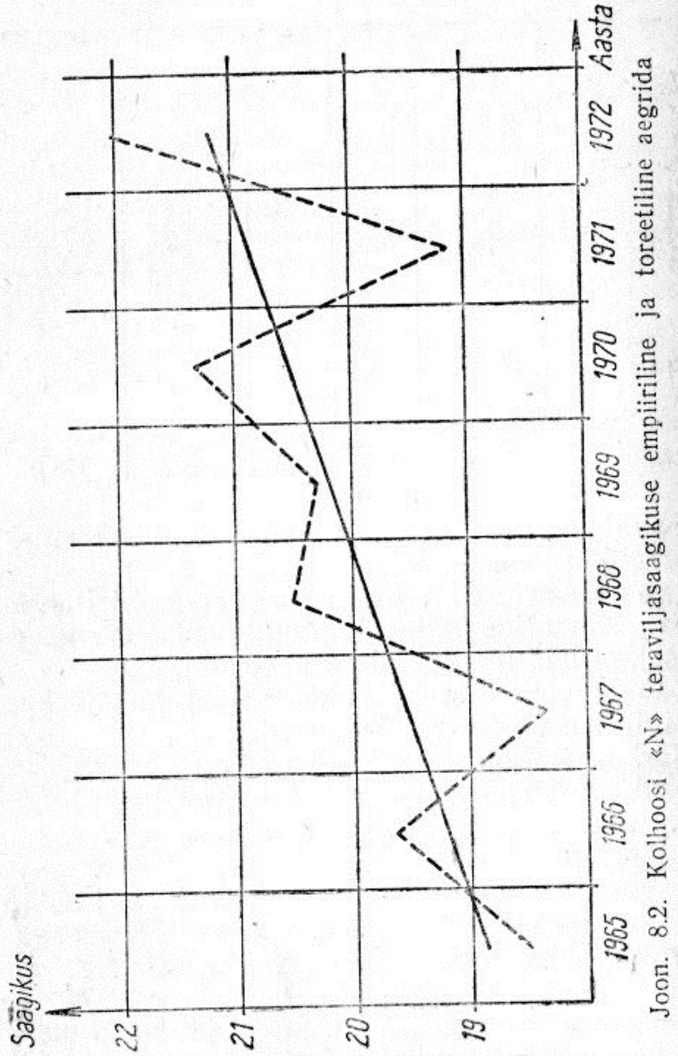
. . . . . .

n-dat järku parabool —

$$y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n.$$

Aegrea tasandamisel parabooliga on seega põhiprobleemiks parameetrite a_0, a_1, a_2, ..., a_n leidmine.

Vähimruutude meetodi kasutamisel tuleb selleks lahendada võrrandisüsteem, milles võrrandite arv oleneb parabooli järgust.



Joon. 8.2. Kolhoosi «N» teraviljasaagikuse empiiriline ja toreetiline aegrida

Tabel 8.15

Ettevõtte «K» toodangu aegrea tasandamine teist järku parabooliga

Aasta	Toodang (milj. rbl.)	t	t^2	t^4	yt	yt^2	y_t
1	2	3	4	5	6	7	8
1970	2,3	—3	9	81	—6,9	20,7	2,04
1971	3,1	—2	4	16	—6,2	12,4	3,22
1972	5,6	—1	1	1	5,6	5,6	5,67
1973	9,2	0	0	0	0	0	8,15
1974	10,0	1	1	1	10,0	10,0	11,04
1975	14,8	2	4	16	29,6	59,2	13,92
1976	18,0	3	9	81	54,0	162,0	18,09
Kokku	63,0	0	28	196	74,9	269,9	×

Nii tuleb teist järku parabooli parameetrite leidmiseks lahendada kolme tundmatuga kolme võrrandi süsteem, kolmandat järku parabooli parameetrite leidmiseks nelja tundmatuga nelja võrrandi süsteem jne. Küsimusele, kas tasandamine parabooliga on rakendatav, aitab vastata diferentside meetod.

Tasandamist parabooliga iseloomustab tabelis 8.15 toodud näide ettevõtte «K» toodangu kohta esitatud aegrea tasandamisest. Veergudes 3—7 on toodud võrrandi parameetrite leidmiseks vajalikud arvutused.

Teist järku parabooli parameetrid leitakse järgmise võrrandisüsteemi järgi:

$$\begin{cases} na_0+a_1\Sigma t+a_2\Sigma t^2=\Sigma y \\ a_0\Sigma t+a_1\Sigma t^2+a_2\Sigma t^3=\Sigma yt \\ a_0\Sigma t^2+a_1\Sigma t^3+a_2\Sigma t^4=\Sigma yt^2. \end{cases}$$

Kui t väärtused valida nii, et $\Sigma t=0$ ja $\Sigma t^3=0$, siis võrrandisüsteemi lahendamine lihtsustub (vrd. eelmine näide).

Antud näite puhul saame järgmise võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} 7a_0+28a_2=63{,}0 \\ 28a_1=74{,}9 \\ 28a_0+196a_2=269{,}9. \end{cases}$$

Siit saame $a_1=\frac{74{,}9}{28}=2{,}675$;

$$\begin{cases} a_0+4a_2=9 \\ a_0+7a_2=9{,}639; \end{cases}$$

$3a_2=0{,}639$; $a_2=0{,}213$;

$a_0=9-4\cdot 0{,}213=8{,}148$.

Parabooli võrrand on seega

$y_t=8{,}148+2{,}675t+0{,}213t^2$.

Aegrea elementide teoreetilised väärtused (y_t) on toodud tabeli 8.15 veerus 8.

8.4. ÜLDISE ARENGUTENDENTSI ÜLDISTAMINE

8.4.1. Interpoleerimine

Üldise arengutendentsi uurimine võimaldab teha oletusi aegrea vahepealsete tundmatute elementide väärtuste kohta. Aegrea puuduvate elementide leidmist nimetatakse aegrea interpoleerimiseks. Üldiselt mõistetakse interpoleerimise all funktsiooni vahepealsete väärtuste arvutamist mitme teadaoleva väärtuse järgi.

Interpoleerimiseks kasutatakse nii aegridade

elementaarkarakteristikuid (kasvutempo, keskmine kasvutempo) kui ka tasandamise meetodeid. Kasutatakse ka graafilist interpoleerimist, kus vahepealsed väärtused leitakse arvjoonise järgi.

Interpoleerimist eeldusel, et elementide väärtused muutuvad lineaarselt, iseloomustab järgmine näide. Ettevõte tootis jaanuaris 18 000 toodet, aprillis 27 000 toodet. Leiame veebruari ja märtsi toodangu. Eeldame lineaarset seost

$y_t=a_0+a_1t$,

kus y_t on t-nda kuu toodang;
a_0 — baasiperioodi (eelmise aasta detsembrikuu toodang);
a_1 — toodangu juurdekasv;
t — kuu järjekorranumber.

Lähteandmete alusel võib kirjutada järgmise võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} a_0+a_1\cdot 1=18\,000 \\ a_0+a_1\cdot 4=27\,000. \end{cases}$$

Lahendades võrrandisüsteemi saame:

$a_0=15\,000$; $a_1=3000$.

Veebruari toodang (y_2) oli seega $15\,000+2\cdot 3000=21\,000$ ja märtsi toodang (y_3) oli $15\,000+3\cdot 3000=24\,000$ toodet.

Interpoleerimiseks on matemaatikas tuletatud mitmesuguseid valemeid. Nii näiteks on *Newtoni interpoleerimisvalem* aegrea vahepealsete väärtuste leidmiseks järgmine:

$$y=y_0+n\Delta y_0+\frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0+\ldots,$$

kus y_0 on aegrea esimese elemendi väärtus;
Δy_0 — aegrea esimese elemendi esimest järku diferents;
$\Delta^2 y_0$ — aegrea esimese elemendi teist järku diferents;
$\Delta^3 y_0$ — aegrea esimese elemendi kolmandat järku diferents;

$$n=\frac{x-x_0}{h},$$

kus x on argument, mille jaoks arvutatakse funktsiooni y väärtus;
x_0 — funktsiooni y argumendi algväärtus;
h — argumendi väärtuse intervall.

Majandusteaduslikes uurimistöödes kasutatakse siiski peamiselt indeksiteooriale tuginevat interpoleerimist.

8.4.2. Ekstrapoleerimine

Ekstrapoleerimiseks nimetatakse nähtuse ühe osa vaatlemisel tehtud järelduste üldistamist tema vaatlemata osale, mõnele teisele territooriumile või tulevasele perioodile.

Nähtuste ajalise muutumise ekstrapoleerimisel eeldatakse, et üldine arengutendents säilib ka tulevikus. Sellise järelduse tegemisel toetutakse kvalitatiivsetele või koguni intuitiivsetele hinnangutele. On täiesti ilmne, et majanduslike nähtuste üldised arengutendentsid ei ole lõpmatult püsivad.

8.5. VÕNGETE UURIMINE NÄHTUSTE AJALISES MUUTUMISES

Aegrea elementide väärtused muutuvad harva täiesti sujuvalt, enamasti esinevad reas mitmesugused võnked. Aegrea võngete all mõistame empiirilise aegrea elementide väärtuste hälbimist kas nende endi keskmisest või teoreetilise rea väärtustest.

Võnked võivad olla juhuslikud või süstemaatiliselt mõjuvatest põhjustest tingitud. Viimastest on eriti olulised hooajalised tegurid.

8.5.1. Juhuslike võngete uurimine

Enam-vähem püsiva arengutendentsiga aegridade võnkumist võib iseloomustada standardhälbega:

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}{n}},$$

kus y_i on aegrea elementide väärtused;
$\bar{y}$ — aegrea elementide keskmine väärtus;
n — aegrea elementide arv.

Kui aegrea elementide väärtused kõiguvad väga oluliselt, siis iseloomustatakse aegrea juhuslikku võnkumist standardhälbele analoogilise näitarvuga:

$$\sigma'_y=\sqrt{\frac{\Sigma(y_i-y_t)^2}{n}},$$

kus y_t on tasandatud aegrea elementide väärtused.

Aegridade võnkumist iseloomustavate näitarvude arvutamist selgitame kolhoosi «N» teravilja-

Tabel 8.16

Kolhoosi «N» teraviljasaagikuse võnkumist iseloomustavate näitarvude arvutus

Aasta	Saagikus y_i	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	y_t	$y_i - y_t$	$(y_i - \bar{y}_t)^2$
1970	18,5	—1,5	2,25	18,74	—0,24	0,058
1971	19,7	—0,3	0,09	19,10	0,60	0,360
1972	18,3	—1,7	2,89	19,46	—1,16	1,346
1973	20,5	0,5	0,25	19,82	0,68	0,462
1974	20,4	0,4	0,16	20,18	0,22	0,048
1975	21,4	1,4	1,96	20,54	0,86	0,740
1976	19,2	—0,8	0,64	20,90	—1,70	2,890
1977	22,0	2,0	4,00	21,26	0,94	0,884
Kokku	×	0	12,24	×	0	6,788

saagikuste aegrea alusel (vt. tabel 8.14). Kaheksa aasta keskmine teraviljasaagikus on kolhoosis 20. Arvutused on koondatud tabelisse 8.16.

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma (y_i - \bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{12{,}24}{8}} = \sqrt{1{,}53} = 1{,}237$$

$$\sigma'_y = \sqrt{\frac{\Sigma (y_i - y_t)^2}{n}} = \sqrt{\frac{6{,}788}{8}} = \sqrt{0{,}849} = 0{,}921$$

Tasandatud aegrea suhtes on võnkumine väiksem kui keskmise saagikuse suhtes. See on ka loomulik, sest tasandatud aegrida on leitud vähimruutude meetodil.

8.5.2. Hooajaliste võngete uurimine

Hooajaliste võngete all mõistame aegrea elementide väärtuste aastasiseseid võnkumisi (suurenemist ja vähenemist), mis korduvad reeglipäraselt aastast aastasse. Hooajalised võnked on näiteks piimatoodangu vähenemine talvekuudel, müüdava puuvilja koguste suurenemine sügisel, turistide arvu kasv suvel jne. Hooajalised võnked mõjuvad sageli majanduslikule tegevusele negatiivselt. Neil juhtudel püütakse võnkeid vältida või vähendada.

Hooajalisuse kvantitatiivseks iseloomustamiseks kasutatakse hooajalisuse indeksit:

$$I_h = \frac{\bar{y}_i}{\bar{y}},$$

kus $\bar{y}_i$ on mitme aasta samade kuude keskmised väärtused;

$\bar{y}$ — aegrea kõigi elementide keskmine väärtus.

Hooajalisuse indeks väljendatakse tavaliselt protsentides. Ülaltoodud kujul kasutatakse hooajalisuse indeksit peamiselt siis, kui aegrea võnked ei ole eriti suured. Muudel juhtudel kasutatakse võrdlemiseks tasandatud ridade elementide väärtusi.

Hooajalisuse indeksite arvutamist selgitab tabelis 8.17 toodud arvnäide ühe rajooni elektrienergia tarbimise hooajalisuse uurimise kohta.

Tabel 8.17

Rajooni elektrienergia tarbimise hooajalisuse indeksite arvutamine (absoluutarvud tuh. kWh)

Kuu Aasta	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Kokku
1974	69,4	56,3	38,3	31,4	26,7	28,3	21,5	19,9	25,7	47,7	76,9	116,4	558,5
1975	97,4	78,0	50,2	33,6	42,6	42,9	41,8	45,3	53,6	62,8	88,4	123,7	760,3
1976	111,6	98,6	92,8	61,0	76,5	80,2	82,3	84,6	93,6	121,2	149,4	225,2	1277,0
Kokku	278,4	282,9	181,3	126,0	145,8	151,4	145,6	149,8	172,9	231,7	314,7	465,3	2595,8
Kuu keskmine	92,8	77,6	60,4	42,0	48,6	50,5	48,5	49,9	57,6	77,2	104,9	155,1	72,1
Hooajalisuse indeks (%)	128,7	107,6	83,8	58,3	67,4	70,0	67,4	69,2	79,9	107,1	145,55	215,1	×

Märkus: Üldine (36 kuu) keskmine elektrienergia tarbimine, 2595,8 : 36 = 72,1.

8.6. MITME NÄHTUSE SAMAAJALISE MUUTUMISE UURIMINE

Majanduslike nähtuste isoleeritud uurimine on väga tinglik. Ühe nähtuse uurimise alusel saab teha vaid piiratud järeldusi. Seetõttu uuritakse tihtipeale samaaegselt mitut nähtust või ühe kompleksnähtuse mitme tunnuse muutumist. Viimaseid võib aga käsitleda ka iseseisvate majanduslike nähtustena.

Nähtuste kompleksel uurimisel saame mitu aegrida. Nende võrdlemiseks tuleb silmas pidada mõningaid aegridade analüüsimise nõudeid ning seoste selgitamiseks rakendada vastavaid spetsiaalvõtteid. Allpool on käsitletud neist kahte — *ridade viimist ühele alusele* ja *ridade vinahelise korrelatsiooni* uurimist.

Samaaegset muutumist on mõtet uurida vaid mõnevahel kuidagi seotud nähtuste puhul. Väielikult isoleeritud nähtuste samaaegse muutumise uurimine ei võimalda mingisuguste põhjendatud järelduste tegemist. Nii näiteks oleks mõlvne seostada odra saagi ja autobusside arvu dünaamikat. Samal ajal võib aga eeldada seost odra saagi ja õlle toodangu ning autobusside arvu ja veetud reisijate arvu vahel.

8.6.1. Ridade viimine ühele alusele

Ridade viimisega ühele alusele saavutatakse mitme aegrea võrreldavus. See on erijuhtumiks, kui rea elementide mõõtühikud on erinevad või kui rea elementide absoluutväärtused on küll samades mõõtühikutes, ent suuruselt väga erinevad.

Aegridade ühele alusele viimise põhieesmärk

Tabel 8.18

Eesti NSV piima ja või toodang 1945—1970. a.

Aasta	Toodang (tuh. t)		Ühele alusele viidud read (%)	
	Piim	Või	Piim	Või
1	2	3	4	5
1945	393,3	3,1	100	100
1950	508,0	9,5	127	307
1955	558,1	9,4	140	303
1960	856,6	17,2	215	555
1965	954,8	21,6	240	697
1970	1024,5	21,6	260	697

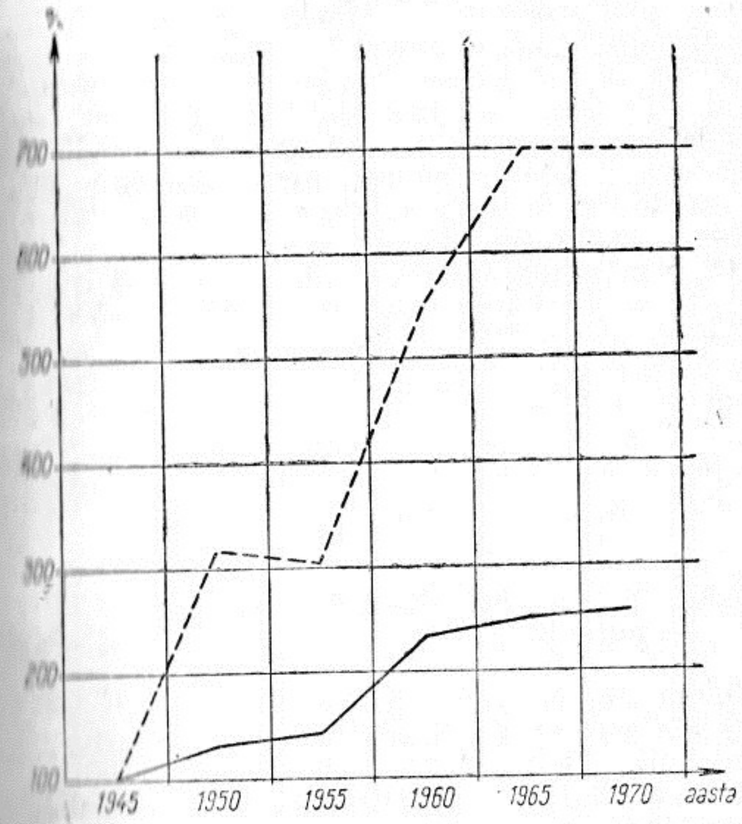
on välja selgitada nähtuste ajalise muutumise suuna ja intensiivsuse sarnasus või erinevused. Selleks võrdsustatakse aluseks võetava elemendi väärtus ühega või 100 protsendiga ning arvutatakse teiste elementide ja aluseks võetud elemendi väärtuse suhe. Kõikides ridades tuleb selline ümberarvutus teha eraldi.

Ühele alusele viimisel võib kasutada mitmesuguseid erinevaid aluseid, näiteks:

1) rea elemendi väärtus esimesel momendil või perioodil;
2) elemendi väärtus mistahes momendil või perioodil;
3) kõigi elementide keskmine väärtus;
4) elementide väärtuste summa.

Kõige rohkem kasutatakse aegridade esimese ühise momendi või perioodi alusele viimist. Mingi teine moment või periood võetakse aluseks siis kui see on kuidagi eriti iseloomulik.

Elementide keskmist on otstarbekas rakendada ühise alusena peamiselt võngete uurimisel.



8.3. Eesti NSV piima- ja võitoodangu indeksdiagramm

Elementide väärtuste summa võib aluseks võtta ainult juhul, kui elementide väärtused on liidetavad, s.t. järjestikuliste perioodidega perioodrea puhul.

Ridade viimist ühele alusele iseloomustab tabelis 8.18 toodud näide Eesti NSV kõikide majandi-

liikide piimatoodangu ja toiduainetetööstuse või-toodangu võrdlemise kohta.

Piima ja või toodang on omavahel seotud nähtused, kuid tabeli andmetest selgub, et nende tootmine pole ajaliselt muutunud hoopiski ühesuguselt. Või toodangu suurenemisele on peale piima toodangu suurenemise avaldanud olulist mõju ka muud tegurid.

Olgu märgitud, et tabeli veergude 4 ja 5 ridades 2—5 toodud arvud on alusindeksid (aluskasvutempod). Ühisele alusele viidud aegridade võrdlemine tuginebki kasvutempode arvutamisele ühe aluse (baasi) suhtes. Väga ilmeka pildi nähtuste muutumise erinevusest võib saada vastavalt arvjooniselt (indeksdiagrammilt) (vt. joonis 8.3).

8.6.2. Ridadevahelise korrelatiivse seose uurimine

Mitme aegrea samaaegsel uurimisel tekib sageli küsimus nende ridade elementide väärtuste muutumise seose ranguse kohta. Kvalitatiivse analüüsi alusel kindlaks tehtud seost tahetakse hinnata ka kvantitatiivselt.

Statistika üldteoorias on aegridade vahelise korrelatiivse seose uurimiseks välja töötatud erilised meetodid, mis tuginevad:

1) empiiriliste ja teoreetiliste ridade hälvete korrelatsiooni uurimisele, nn. ridade hälvete korrelatsioon;
2) ridade diferentside (juurdekasvude) uurimisele, nn. ridade diferentside korrelatsioon.

Hälvete korrelatsiooni rangust iseloomusta-

Aasta	Koguse indeksid 1940. a. suhtes % x	Hinna indeksid 1940. a. suhtes % y	Tasandatud read: koguse indeksid % x'	Tasandatud read: hinna indeksid % y'	Hälbed: $d_x = x - x'$	Hälbed: $d_y = y - y'$	$d_x d_y$	d_x^2	d_y^2
1950	114	93	101,0	101,2	13,0	—8,2	—106,60	169,00	67,24
1951	97	101	103,6	101,3	—6,6	—0,3	1,98	43,56	0,09
1952	100	109	106,1	101,4	—6,1	7,6	—46,36	37,21	57,76
1953	105	100	108,7	101,6	—3,7	—1,6	5,92	13,69	2,56
1954	111	105	111,2	101,7	—0,2	3,3	—0,66	0,04	10,89
1955	112	111	113,8	101,8	—1,8	9,2	—16,56	3,24	84,64
1956	117	98	116,3	101,9	0,7	—3,9	—2,73	0,49	15,21
1957	121	99	118,9	102,0	2,1	—3,0	—6,30	4,41	9,00
1958	124	99	121,4	102,1	2,6	—3,1	—8,06	6,76	9,61
Kokku	×	×	×	×	×	×	—179,38	278,40	257,00

takse lineaarse korrelatsioonikordajaga, mis arvutatakse valemiga:

$$r_{d_x d_y} = \frac{\Sigma d_x d_y}{\sqrt{\Sigma d_x^2 \cdot \Sigma d_y^2}},$$

kus d_x on empiirilise (tegeliku) rea elementide väärtuste x hälbed vastavatest teoreetilise (tasandatud) rea elementide väärtustest x' ($d_x = x - x'$);

d_y — samasugused hälbed teises y reas ($d_y = y - y'$).

Näide on toodud tabelis 8.19.

$$r = \frac{-179{,}38}{\sqrt{278{,}4 \cdot 257{,}0}} = -0{,}672.$$

Siit järeldub, et kolhoositurgudele toodud liha koguse indeksite ja hinna indeksite vahel on küllaltki range pöördvõrdeline korrelatiivne seos.

Ridade diferentside korrelatsioonikordaja arvutatakse valemiga:

$$r_{\Delta_x \Delta_y} = \frac{\Sigma \Delta_x \Delta_y}{\sqrt{\Sigma \Delta^2 x \cdot \Sigma \Delta^2 y}},$$

kus Δx on aegrea elementide väärtuste x esimest järku diferentsid;

Δy — aegrea elementide väärtuste y esimest järku diferentsid.

Esimest järku diferentside kasutamine korrelatsioonikordaja arvutamisel on õigustatud siis, kui uuritavad nähtused muutuvad lineaarselt, s.t. kui esimest järku diferentsid on püsivad. Kui nähtuse ajalist muutumist iseloomustab teist järku parabool, siis tuleb ridade diferentside korrelatsioonikordaja arvutada teist järku diferentside alusel.

Sageli ühe nähtuse muutumine avaldab mõju teise nähtuse muutumisele alles teatava aja möödudes. Laagerdamist vajava tooraine tootmine avaldab valmistoodangu valmistamisele mõju alles laagerdamisaja möödudes. Sellistel juhtudel arvutatakse korrelatsioonikordaja aegridade nihutamisega vastavalt mõjumisajale (laagerdamisajale). Sellist nihutamist võib rakendada ka mõjumisaja väljaselgitamisel. Aegridu nihutatakse teineteise suhtes korduvalt ning arvutatakse korrelatsioonikordajad. Kõige suuremale korrelatsioonikordajale vastav nihe iseloomustabki mõjumisaega.

IX INDEKSID

9.1. INDEKSITEOORIA

Indeksiteooria on statistika üldteooria haru, mis on välja kujunenud spetsiaalselt majandusuuringutest ja on neile oluliseks metodoloogiliseks aluseks. Teised statistika üldteooria harud tuginevad suurel määral matemaatilisele statistikale ja nad ei ole majandusteadusele spetsiifilised — neid on statistika üldteooria kohandanud majandusuuringute vajadusteks, kuid neis käsitletavad meetodid (dispersioonanalüüs, korrelatsioon- ja regressioonanalüüs, väljavõtteline vaatlus) on metodoloogiliseks aluseks ka paljude teiste teadusharude uuringutes. Indeksiteoorias välja töötatud indeksite arvutamise meetodid leiavad aga kasutamist eelkõige majanduslike nähtuste analüüsimisel. Majandusstatistikas ning rahvamajandusharude statistikates (näiteks tööstus-, põllumajandus- ja transpordistatistikas) kasutatakse indekseid laialdaselt.

Kaasaegsele agregaatindeksite teooriale pani 1871. aastal aluse Etienne Laspeyres, kes mõnda aega töötas ka Tartu Ülikoolis. Saja aasta jooksul on indeksiteooriale pühendatud väga palju teaduslikke töid.

Käsiraamatu indekseid käsitleva peatüki kirjutamisel on tuginetud eelkõige prof. U. Mereste töödele indeksiteooria kohta [2, 16 ja 17] ning statistika üldteooria õpikutele.

9.2. INDEKSITE LIIGITUS

Indeksitega iseloomustatava objekti struktuuri järgi liigitatakse indeksid järgmiselt:

1) individuaalindeksid;
2) üldindeksid.

Individuaalindeks on suhtarv, millega väljendatakse kas mingi kvalitatiivselt ühtlase kogumi või mingi kvalitatiivse üksiktunnuse suhtelist ajalist muutumist.

Üldindeks on suhtarv, millega väljendatakse mingi ebaühtlase koostisega kogumi suhtelist ajalist muutumist.

Indeksivalemi kuju järgi indeksid liigitatakse:

1) lihtindeksid;
2) liitindeksid.

Lihtindeks leitakse lihtsalt kahe arvu jagatisena, nagu tavalised suhtarvud. Kõik individuaalindeksid on valemi kuju järgi lihtindeksid.

Liitindeks leitakse kas individuaalindeksite keskmisena või agregaatsummade jagatisena.

Üldindeksid võivad valemi kuju järgi olla kas liht- või liitindeksid, suurem osa on liitindeksid.

Nähtuse muutumise iseloomustamisel pikema aja jooksul liigitatakse indeksid järgmiselt:

1) alusindeksid;
2) ahelindeksid.

Alusindeksid leitakse ühe kindla momendi või perioodi alusel. Neid nimetatakse ka baasiindeksiteks.

Ahelindeksid leitakse järjekorras eelneva momendi või perioodi alusel.

9.3. INDIVIDUAALINDEKSID

Individuaalindeksid iseloomustavad:
1) kvalitatiivselt ühtlase kogumi suhtelist ajalist muutumist;
2) mingi tunnuse väärtuse suhtelist ajalist muutumist.

Esimese rühma indeksi näiteks võib olla mingi toodanguliigi ajalise muutumise indeks:

$$i_q = \frac{q_1}{q_0},$$

kus q_1 on toodangu maht vaadeldaval perioodil (aruandeperioodil);
q_0 — toodangu maht võrdluse aluseks võetud perioodil.

Teise rühma indeksi näiteks võib olla mingi toote hinna ajalise muutumise indeks:

$$i_p = \frac{p_1}{p_0},$$

kus p_1 on toote hind vaadeldaval perioodil (aruandeperioodil);
p_0 — toote hind võrdluse aluseks võetud perioodil.

Individuaalindekseid on käsitletud eespool dünaamikasuhtarvudena (vt. jaot. 2.3) ja aegridade karakteristikutena (vt. jaot. 8.2).

9.4. ÜLDINDEKSID

Üldindeksid iseloomustavad kvalitatiivselt ebaühtlaste kogumite (liitkogumite) suhtelist ajalist muutumist. Sellise kogumi näiteks on ettevõtte toodang, mis koosneb rohkem kui ühest tooteliigist. Nende tooteliikide toodangu üldmahtu ei saa väljendada üksikute koostisosade (osakogumite) mahtude lihtsa liitmise teel.

Mitteühtlaste kogumite mahu väljendamiseks ühes arvus tuleb osakogumid ühismõõtsustada, s.t. avaldada ühtsetes mõõtühikutes. Ühismõõtsustajatena kasutatakse kõige sagedamini rahalisi suurusi, näiteks hindu, kuid on mõeldavad ka mitmesugused muud ühismõõtsustajad (tööajakulutused, materjali erikulu normid jne.).

Ühismõõtsustatavate ja ühismõõtsustaja (ühismõõtsuskoefitsiendi) korrutiste summat nimetatakse statistikas agregaadiks.

Tooteliikide koguste q ja tooteühikute hindade p agregaat saadakse järgmiselt:

$$q_1p_1+q_2p_2+\ldots+q_np_n=\sum_{i=1}^{n} q_ip_i.$$

Indeksivalemite moodustamisel peetakse sellist agregaati üldtuntuks ja märgitakse lihtsalt Σqp. Tähistele q ja p lisatavad arvud viitavad sellisel juhul mitte enam tooteliigile vaid perioodile.

Toodangu koguse ja tooteühiku hinna korrutist nimetatakse toodangu maksumuseks. Seega qp on toodangu osakogumi maksumus ning Σqp on vaadeldava toodangu kogumaksumus. Toodangu maksumuse eristamiseks üksikutel perioodidel tähistatakse võrdluse aluseks (baasiks) võetava perioodi toodangu maksumus Σq_0p_0 ja võrreldava perioodi (aruandeperioodi) toodangu maksumus Σq_1p_1. Kui võrreldavaid perioode on rohkem kui üks, siis vastavalt Σq_1p_1, Σq_2p_2 jne. Mõnel juhul on vaja teada toodangu tinglikku maksumust, näiteks aruandeperioodi toodangu maksumust alusperioodi hinda-

des, seda tähistatakse $\Sigma q_1 p_0$. Analoogiliselt tähistatakse ka teisi agregaate. Kui tooteliikide ühismõõtsustajana kasutada tööjõu erikulu t, siis on aruandeeprioodi toodangu (toodangu valmistamiseks tuhtud töökulutuste) agreagat $\Sigma q_1 t_1$.

Üldindekseid tähistatakse tavaliselt suurtähega I. Toodangu maksumuse indeks on

$$I_{qp}=\frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_0}.$$

Toodangu maksumust võib tähistada ka ühe tähega ($m=qp$). Iga tooteliigi maksumuse indeks oleks sellisel juhul individuaalindeks

$$i_m=\frac{m_1}{m_0},$$

kus m_0 on tooteliigi maksumus alusperioodil;
m_1 — tooteliigi maksumus vaadeldaval perioodil.

Tooteliikide maksumuste summa moodustab kogu toodangu maksumuse, mille võime samuti tähistada ühe tähega ($M=\Sigma m=\Sigma pq$). Sellisel juhul on võimalik üldindeksit avaldada nii lihtkui ka liitindeksina:

$$I_M=\frac{M_1}{M_0}=\frac{\Sigma m_1}{\Sigma m_0}=\frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_0}=I_{qp}.$$

Üldindekseid kasutatakse lihtindeksitena peamiselt mitmesugustes majanduse ülevaatlikes kirjutistes, majanduslikes analüüsides esitatakse nad tavaliselt liitindeksitena.

9.5. TEGURIINDEKSID

Teguriindeksiks nimetatakse üldindeksit, mis iseloomustab kahest (või mitmest) koos toimivast tegurist vaid ühe muutumise keskmist mõju. Üldindeksit, mis iseloomustab mitme teguri muutumise samaaegset mõju, nimetatakse seevastu koondindeksiks.

Nii näiteks toodangu maksumuse üldindeks I_{qp} on koondindeks. Ta väljendab nii toodangu osakogumite mahu kui ka hindade muutumise mõju. Selle indeksi alusel on võimalik kujundada teguriindeksid, mis iseloomustavad vaid ühe teguri muutumise mõju, kusjuures teise teguri mõju elimineeritakse.

Ühel juhul saadakse toodangu füüsilise mahu üldindeks (agregaatindeks):

$$I_q=\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0}.$$

Siin on elimineeritud hindade muutumise mõju. Indeksi väärtus oleneb vaid toodangu osakogumite koguste muutumisest. Toodangu kogus on muutuv suurus, hind ühismõõtsustaja, mida nimetatakse ka kaaluks.

Elimineerides toodangu osakogumite mahu muutumise mõju saadakse hinnaindeks:

$$I_p=\frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_1 p_0}.$$

Kaaludena on siin kasutatud aruandeperioodi toodangu osakogumite koguseid. Mõeldav oleks ka alusperioodi toodangu osakogumite koguste kasutamine kaaludena, samuti kui toodangu füüsilise mahu indeksis aruandeperioodi hindade kasuta-

Tabel 91

Kolhoosi «Võit» põllumajandussaaduste realiseerimine Tallinna turul

Toode	Mõõt-ühik	Kogus		Hind (rbl.)	
		Eelmisel perioodil	Vaadeldaval perioodil	Eelmisel perioodil	Vaadeldaval perioodil
Kartul	kg	8000	10 000	0.10	0.12
Õunad	kg	1000	2000	0.60	0.45
Loomaliha	kg	800	1000	2.00	1.80
Piim	l	4000	6000	0.26	0.26

Tabel 92

Kolhoosi «Võit» realiseeritud toodangu maksumuse, füüsilise mahu ja hinnaindeksi arvutused

Füüsilise mahu individuaal-indeksid $i_q=\frac{q_1}{q_0}$	Hinna individuaal-indeksid $i_p=\frac{p_1}{p_0}$	Eelmise perioodi toodangu maksumus q_0p_0	Vaadeldava perioodi toodangu maksumus q_1p_1	Vaadeldava perioodi toodangu maksumus eelmise perioodi hindades q_1p_0
1,25	1,20	800	1200	1000
2,00	0,75	600	900	1200
1,25	0,90	1600	1800	2000
1,50	1,00	1040	1560	1560
Kokku	×	4040	5460	5760

mine kaaludena. Siin esitatud hinnaindeks tuleneb varem esitatud toodangu maksumuse ja toodangu füüsilise mahu indeksitest ning järgmisest seosest:

$$I_q \cdot I_p = I_{qp} \quad \text{ja}$$

$$\frac{\Sigma q_1p_0}{\Sigma q_0p_0} \cdot \frac{\Sigma q_1p_1}{\Sigma q_1p_0} = \frac{\Sigma q_1p_1}{\Sigma q_0p_0}.$$

See indeksite seos vastab seosele, kus toodangu maksumus on koguste ja hindade korrutis.

Kahe teguriga teguriindeksite konstrueerimisel kasutatakse üldiselt järgmist reeglit: kvantitatiivne muutuv suurus ühismõõtsustatakse kvalitatiivse teguri alusperioodi väärtustega ning kvalitatiivne muutuv suurus kvantitatiivse teguri aruandeperioodi väärtustega.

Individuaal- ning koond- ja teguriindeksite arvutamist selgitab järgnev näide. Lähteandmed on toodud tabelis 9.1, arvutused on koondatud tabelisse 9.2.

$$I_{qp} = \frac{\Sigma q_1p_1}{\Sigma q_0p_0} = \frac{5460}{4040} = 1{,}351;$$

$$I_q = \frac{\Sigma q_1p_0}{\Sigma q_0p_0} = \frac{5760}{4040} = 1{,}426;$$

$$I_p = \frac{\Sigma q_1p_1}{\Sigma q_1p_0} = \frac{5460}{5760} = 0{,}948.$$

Arvutusi võib kontrollida järgmise seosega:

$$I_{qp} = I_q \cdot I_p = 1{,}426 \cdot 0{,}948 = 1{,}352.$$

Väike erinevus tuleneb ümardamisest.

9.6. KESKMISED INDEKSID

Keskmiseks indeksiks nimetatakse liitindeksit, mis on avaldatud individuaalindeksite keskmise kujul. Keskmiseks indeksiks võib ümber kujundada mistahes agregaatindeksi.

Toodangu füüsilise mahu üldindeksi võib avaldada toodangu mahu individuaalindeksite aritmeetilise keskmisena, kus kaaludeks on alusperioodi toodangu osakogumite maksumused:

$$I_q = \frac{\Sigma i_q q_0 p_0}{\Sigma q_0 p_0}.$$

Hinnaindeksi võib avaldada hinna individuaalindeksite harmoonilise keskmisena, kus kaaludeks on vaadeldava perioodi (aruandeperioodi) toodangu osakogumite maksumused:

$$I_p = \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma \frac{1}{i_p} q_1 p_1}.$$

Selle indeksi arvutamisel individuaalindeksite pöördväärtusi tavaliselt ei leita, vaid leitakse jagatised $\frac{q_1 p_1}{i_p}$ ja nende jagatiste summa.

Keskmiste indeksite arvutamist võib kontrollida tabelites 9.1 ja 9.2 toodud arvandmetega. Arvutuste käigus selgub aga, et toodangu füüsilise mahu indeksi lugejas $i_q q_0 p_0 = q_1 p_0$ ja hinnaindeksi nimetajas $\frac{1}{i_p} q_1 p_1 = q_1 p_0$, mis kinnitab, et keskmine indeks on kindlasti sama väärtusega kui tavaline liitindeks.

Keskmiste indeksite arvutamist on siiski otstarbekas tunda, sest sageli tingivad nende kasutamise vajaduse lähteandmed. Eespool toodud näite puhul (tabel 9.1) ei olnud selleks vajadust. Kui on aga teada ainult individuaalindeksid ja toodangu osakogumite maksumused, siis tuleb paratamatult kasutada arvutuskäiku, mis vastab keskmiste indeksite leidmisele (vt. tabel 9.3).

Tabel 9.3

Tootmiskoondise «Sakala» I ja II kvartali tootmisnäitajad ning indeksite arvutused

Toode	Toodangu maksumus omahinnas (rbl.)		Toodangu-mahu individuaal-indeksid	Omahinna individuaal-indeksid	$i_q q_0 p_0$	$\frac{q_1 p_1}{i_p}$
	I kv. $q_0 p_0$	II kv. $q_1 p_1$	i_q	i_p		
1	2	3	4	5	6	7
A	4000	4800	1,500	0,800	6000	6000
B	8400	5680	0,667	1,014	5600	5600
C	5000	9000	2,000	0,900	10000	10000
Kokku	17 400	19 480	×	×	21 600	21 600

$i_q q_0 p_0 = q_1 p_0$ ja $\frac{q_1 p_1}{i_p} = q_1 p_0$.

Üldindeksid:

$$I_q = \frac{\Sigma i_q q_0 p_0}{\Sigma q_0 p_0} = \frac{21\,600}{17\,400} = 1{,}241;$$

$$I_p = \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma \frac{1}{i_p} q_1 p_1} = \frac{19\,480}{21\,600} = 0{,}902;$$

$$I_{qp}=\frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_0}=\frac{19\,480}{17\,400}=1{,}120;$$

$$I_{qp}=I_q \cdot I_p=1{,}241 \cdot 0{,}902=1{,}119\approx 1{,}12.$$

9.7. STRUKTUURINIHETE INDEKSID

Struktuuriniheteena käsitatakse statistikas muutusi nähtuse koostises, üldkogumi jagunemises osakogumiteks. Struktuuri iseloomustatakse tavaliselt struktuurisuhtarvudega (vt. jaot. 2.1).

Majanduslike nähtuste struktuuri muutumine toob enamasti kaasa ka keskmiste kvalitatiivsete näitajate muutumise. Struktuurinihete mõju uurimiseks saab edukalt kasutada indeksimeetodit. Struktuurinihete mõju hindamisel leitakse kolm indeksit:

1) muutuva struktuuri indeks (I^{ms});
2) püsiva struktuuri indeks (I^{ps});
3) struktuurinihete indeks (I^{sn}).

Lähtutakse seosest

$$I^{ms}=I^{ps} \cdot I^{sn}.$$

Muutuva struktuuri indeks on vaadeldava perioodi (aruandeperioodi) ja alusperioodi kvalitatiivsete näitajate keskmiste suhe. Hindade muutumise uurimisel on vastav indeks järgmine:

$$I_{\bar{p}}^{ms}=\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_0}.$$

Seda indeksit saab esitada ka teisendatult:

$$I_{\bar{p}}^{ms}=\frac{\frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_1}}{\frac{\Sigma q_0 p_0}{\Sigma q_0}}=\frac{\sum \frac{q_1}{\Sigma q_1} p_1}{\sum \frac{q_0}{\Sigma q_0} p_0}=\frac{\Sigma \psi_1 p_1}{\Sigma \psi_0 p_0},$$

kus ψ_1 ja ψ_0 on struktuurisuhtarvud.

$$\psi_1=\frac{q_1}{\Sigma q_1} \quad \text{ja} \quad \psi_0=\frac{q_0}{\Sigma q_0}.$$

Eeltoodud teisenduse tundmine aitab paremini mõista lahenduskäiku.

Muutuva struktuuri indeksi valemist nähtub, et murru lugejas (iseloomustab aruandeperioodi) ja murru nimetajas (iseloomustab alusperioodi) on erinevad kogumi struktuuri suhtarvud.

Püsiva struktuuri indeksi leidmisel peavad murru lugejas ja nimetajas olema samad struktuurisuhtarvud. Nendeks võetakse aruandeperioodi kogumi struktuuri suhtarvud. Hinna püsiva struktuuri indeks on:

$$I_{\bar{p}}^{ps}=\frac{\Sigma \psi_1 p_1}{\Sigma \psi_1 p_0}=\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_t},$$

kus $\bar{p}_t$ on tinglik keskmine hind.

Murru nimetajat $\Sigma \psi_1 p_0$ võib nimetada tinglikuks keskmiseks hinnaks, mis on leitud aruandeperioodi toodangu struktuuri ja alusperioodi hindade alusel:

$$\Sigma \psi_1 p_0=\sum \frac{q_1}{\Sigma q_1} p_0=\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_1}=\bar{p}_t.$$

Püsiva struktuuri indeks iseloomustab kvalitatiivse näitaja muutumist eeldusel, et kvantitatiivne näitaja ei muutunud, oli alusperioodil samasugune kui aruandeperioodil.

Struktuurinihete mõju väljaselgitamiseks tuleb leida indeks, kus kvalitatiivne näitaja on püsiv suurus, struktuurisuhtarv aga muutuv suurus.

$$I_{\bar{p}}^{sn}=\frac{\Sigma \psi_1 p_0}{\Sigma \psi_0 p_0}=\frac{\bar{p}_t}{\bar{p}_0}.$$

Tabel 9.4

Toote «A» toodang ja omahind tootmiskoondise «Vasar» kolmes vabrikus I ja II kvartalis

Vabrik	Toodang (tk.)		Omahind (rbl.)	
	I kv. (q_0)	II kv. (q_1)	I kv. (p_0)	II kv. (p_1)
I	400	500	1,10	1,00
II	700	600	1,00	1,00
III	900	1400	0,90	0,80
Kokku	2000	2500	×	×

Struktuurinihete indeks on kvalitatiivse näitaja tingliku ja alusperioodi keskmise suhe.

Püsiva ja muutuva struktuuri ning struktuurinihete indeksite arvutamist iseloomustab järgmine näide (lähteandmed tabelis 9.4).

Kui on teada toodangu kogus igas üksuses, siis struktuurisuhtarve ei ole vaja arvutada, indeksid saab leida ilma selleta. Struktuurinihete mõju paremaks mõistmiseks on aga soovitatav arvutada ka struktuurisuhtarvud. Käesolevas näites on kõik indeksid leitud kahe valemi järgi, keskmiste suhtena ning struktuuri suhtarvude ja omahindade agregaatide suhtena. Vahearvutused on koondatud tabelisse 9.5.

$$\bar{p}_0 = \frac{\Sigma q_0 p_0}{\Sigma q_0} = \frac{1950}{2000} = 0{,}975;$$

$$\bar{p}_1 = \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_1} = \frac{2220}{2500} = 0{,}888;$$

$$\bar{p}_t = \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_1} = \frac{2410}{2500} = 0{,}964.$$

Tabel 9.5

Püsiva ja muutuva struktuuri ning struktuurinihete indeksite arvutustabel

Vabrik	Toodangu maksumus			Toodangu struktuur		$\psi_0 p_0$	$\psi_1 p_1$	$\psi_1 p_0$
	$q_0 p_0$	$q_1 p_1$	$q_1 p_0$	$\psi_0 = \frac{q_0}{\Sigma q_0}$	$\psi_1 = \frac{q_1}{\Sigma q_1}$			
I	440	500	550	0,20	0,20	0,220	0,200	0,220
II	700	600	600	0,35	0,24	0,350	0,240	0,240
III	810	1120	1260	0,45	0,56	0,405	0,448	0,504
Kokku	1950	2220	2410	1,00	1,00	0,975	0,888	0,964

Keskmise omahinna arvutuste ja tabelis leitud struktuurisuhtarvude ja omahindade agregaatide võrdlemine näitab, et

$$\bar{p}_0 = \Sigma \psi_0 p_0 = 0{,}975;$$
$$\bar{p}_1 = \Sigma \psi_1 p_1 = 0{,}888;$$
$$\bar{p}_t = \Sigma \psi_1 p_0 = 0{,}964.$$

Seega

$$I_p^{str} = \frac{\Sigma \psi_1 p_1}{\Sigma \psi_0 p_0} = \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_0} = \frac{0{,}888}{0{,}975} = 0{,}911;$$

$$I_p^{fix} = \frac{\Sigma \psi_1 p_1}{\Sigma \psi_1 p_0} = \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_t} = \frac{0{,}888}{0{,}964} = 0{,}921;$$

$$I_p^{str} = \frac{\Sigma \psi_1 p_0}{\Sigma \psi_0 p_0} = \frac{\bar{p}_t}{\bar{p}_0} = \frac{0{,}964}{0{,}975} = 0{,}989.$$

Tulemusi võib kontrollida seosega

$$I_{\overline{p}}^{ms} = I_{\overline{p}}^{ps} \cdot I_{\overline{p}}^{sn} = 0{,}921 \cdot 0{,}989 = 0{,}911.$$

Tooteühiku keskmine omahind alanes 8,9 protsenti. Kui toodangu struktuur oleks I kvartalis olnud samasugune kui II kvartalis, siis keskmine omahind oleks alanenud 7,9 protsenti. Struktuurinihete mõjul omahind alanes 1,1 protsenti.

X STATISTILISED HÜPOTEESID

10.1. STATISTILISE HÜPOTEESI MÕISTE

Eelmistes peatükkides käsitletud statistilised karakteristikud annavad meile teatava ettekujutuse vaadeldavast kogumist, kuid nad ei võimalda veel teha üldistusi. Erandi moodustavad väljavõtukogumi karakteristikud, mida kasutatakse üldkogumi parameetrite tõenäosusliku hindamiseks. Järelduste tegemiseks leitud karakteristikute alusel tuleb neid võrrelda samasuguste varem leitud, teistel kogumitel esinevate või teoreetiliste karakteristikutega. Seejuures püstitatakse teatav hüpotees erinevuse olulisuse või ebaolulisuse kohta, mis siis teatava kriteeriumi järgi leiab kinnitamist või kummutatakse. Statistiline hüpotees ei asenda uurija üldteoreetilist hüpoteesi uuritava nähtuse teatavate seaduspärasuste kohta, mis jääb ikkagi uuringu suunavaks ideeks. Statistiline hüpotees on vaid üldteoreetilise hüpoteesi statistiline väljendus.

Statistiline hüpotees eeldab statistika kategooriate (keskmised, variatsiooninäitarvud, seose rangust näitajad jne.) kasutamist. Need kategooriad on seotud statistilise jaotuse vormiga ja neis väljenduvad massnähtuste seaduspärasused, mis on tõenäosusliku iseloomuga. Ühtlasi tuleb eeldada, et vaadeldavad muutuvad suurused on juhuslikud.

Statistilise hüpoteesi püstitamisel tuleb lugeda

iseendast mõistetavaks, et statistika kasutab väl- javõttelise vaatluse või katse andmeid. Statistiline hüpotees peab näitama nende lähedust teoreetiliselt eeldatavatele, deduktiivse loogika mudeliga etteantuile.

Käsiraamatus on käsitletud vaid statistiliste hüpoteeside uurimise arvutustehnilisi võtteid. Õigete järelduste tegemiseks vaadeldava massnähtuse kohta peab uurija küllalt hästi tundma selle nähtusega seotud filosoofilisi ja majandusprobleeme, samuti tõenäosusteooriat ja loogikat.

10.2. χ^2-KRITEERIUM

Üheks laialdaselt kasutatavaks statistiliste hüpoteeside hindamise kriteeriumiks on χ^2-kriteerium («*hii-ruut-kriteerium*»). See on mittepara- meetriline hindamise kriteerium, sest selle arvutamisel kasutatakse kogumit iseloomustavate karakteristikute asemel variantide jaotust iseloomustavaid sagedusi.

χ^2 leitakse järgmise valemiga:

$$\chi^2 = \sum \left[\frac{(f_i - f'_i)^2}{f'_i} \right],$$

kus f_i on tegelikult esinenud jaotussagedused;
f'_i — teoreetilised jaotussagedused.

Teoreetilised jaotussagedused määrab see jaotus, mis võeti aluseks hüpoteesi püstitamisel. Nii näiteks võib eeldada, et kõik spordiloto loosimisel kasutatavad kuulid on absoluutselt ühesugused ja kõik 49 arvu esinevad loosimistulemustes võrdne arv kordi. Samuti võib oletada, et hea («ausa»)

täringu korral kõik silmade variandid (1—6) esinevad võrdne arv kordi. Katsetamisel aga selgub, et tegelik jaotus ei vasta teoreetilisele. Nüüd püstitatakse hüpotees, et hälbimine on mitteoluline. Hüpoteesi kontrollimiseks leitakse empiiriline χ^2-kriteerium ja võrreldakse seda teoreetilisega. Kasutatakse vastavaid tabeleid (vt. lisa 9).

χ^2 arvutamist võib iseloomustada näitega täringu viskamise kohta. Täringut visati 120 korda. Täiesti «ausa» täringu korral oleks pidanud iga silmade arv esinema kakskümmend korda. Tegelikult aga saadi mõnevõrra erinev tulemus (vt. tabel 10.1). Kas tuleb seda erinevust pidada oluliseks või mitte?

Võib püstitada hüpoteesi $H_0 : F(f) = F'(f')$ või $H_0 : F(x) = F'(x, f')$, kus F' on teoreetilise jaotuse funktsioon.

Vabadusastmete arv $n = k - 1$,
kus k on variantide arv.

Tabel 10.1

Arvutused täringu viskamisel esinenud tegeliku jaotuse võrdlemiseks teoreetilisega

Täringu silmade arv x	Teoreetiline sagedus f'_i	Tegelik sagedus f_i	$f_i - f'_i$	$(f_i - f'_i)^2$	$\frac{(f_i - f'_i)^2}{f'_i}$
1	20	17	—3	9	0,450
2	20	22	2	4	0,200
3	20	18	—2	4	0,200
4	20	21	1	1	0,050
5	20	23	3	9	0,450
6	20	19	—1	1	0,050
Kokku	120	120	0	×	1,400

Hüpoteesi kinnitamise või kummutamise olulisuse piir määratakse kindlaks vastavalt uurimisobjektile. Kui võtta selleks piiriks 0,05, siis vastavalt vabadusastmete arvule ($n=5$) on χ^2 kriitiline väärtus tabeli järgi 15,086. Arvutuslik $\chi^2=1{,}400$, $\chi^2_{arv}<\chi^2_{0,05}$. Hüpotees tuleb lugeda kinnitatuks.

χ^2-kriteeriumi võib kasutada ka tegeliku jaotuse normaaljaotusele vastavuse kontrollimiseks. Selleks tuleb leida variantide esinemise teoreetilised sagedused (vt. 4.8). Kasutades samu andmeid võib püstitada hüpoteesi $H_0: F(x)=F'(x:\bar{x},\ \sigma)$. χ^2-kriteerium on leitud tabelis 10.2.

Käesoleval juhul arvutuslik χ^2-kriteerium on suurem kõigist tabelis toodud χ^2-kriteeriumi kriitilistest väärtustest, millest järeldub, et hüpotees normaaljaotuse kohta on kummutatud. Vabadusastmete arv n on vaadeldavas näites $9-1=8$. N. Družinin [18] peab õigeks võtta vabadus-

Tabel 10.2

χ^2-kriteeriumi arvutused

x_i	f	f'	$f-f'$	$(f-f')^2$	$\frac{(f-f')^2}{f'}$
240	1000	597	403	162409	272,04
260	1500	1251	249	62001	49,56
280	2000	2098	—98	9604	4,57
300	2500	2767	—267	71289	25,76
320	3000	2870	130	16900	5,88
340	2000	2357	—357	127449	54,07
360	1500	1521	—21	441	0,29
380	1000	784	216	46656	59,51
400	500	314	186	34596	110,18
Kokku	15000	×	14559	×	581,86

astmete arvuks sellisel juhul $n=k-3$, sest lisaks f'-le on ka $\bar{x}$ ja σ jaotusega määratud suurused.

Kogumi jagunemisel kaheks alamkogumiks kvalitatiivsete tunnuste (võivad olla ka alternatiivsed tunnused) järgi võib jaotumise erinevuse olulisust hinnata χ^2-kriteeriumi järgi. Seda selgitab järgnev näide.

Koolis uuriti õpilaste arvamust romaanide aluse tehtud filmide ja dramatiseeringute kohta. 58 küsitletud õpilasest 40 eelistas filmi (tunnus A), 18 dramatiseeringuid (tunnus B). Tekib küsimus, kas filmide suurem eelistamine on vaatlusandmete alusel juhuslik või teatav väljakujunenud arvamus? Püstitatakse nn. nullhüpotees, et arvamused peavad jagunema pooleks.

$$H_0: p=q=\frac{1}{2},$$

kus p on filme eelistavate õpilaste osamäär;
q — dramatiseeringuid eelistavate õpilaste osamäär ($q=1-p$).

Vastavalt nullhüpoteesile peaks mõlemas osakogumis olema võrdne arv liikmeid

$$n_1=n_2=\frac{58}{2}=29.$$

$$\chi^2=\sum\frac{(f_i-f'_i)^2}{f'_i}.$$

χ^2-kriteeriumi arvutused on otstarbekas korrastada tabelisse (tabel 10.3).

Selle vaatluse puhul on võetud hälbimise olulisuse määraks 0,05. Vastavalt tabelile (vt. lisa 9) on ühe vabadusastmega $\chi^2_{0,05}=3{,}841$.

Kuna arvutatud χ^2-kriteerium on suurem kui

Tabel 10.3

χ^2-kriteeriumi arvutused

Tunnus	Esinemissagedus f_i	Teoreetiline sagedus f'_i	$f_i - f'_i$	$(f_i - f'_i)^2$	$\frac{(f_i - f'_i)^2}{f'_i}$
A	40	29	11	121	4,17
B	18	29	−11	121	4,17
Kokku	58	58	0	×	8,34

tabelis toodud χ^2-kriteerium (8,34>3,841), siis loetakse nullhüpotees kummutatuks ja väidetakse, et filme eelistavate õpilaste osamäär on oluliselt suurem.

Kogumi jagunemisel osakogumiteks enam kui kahe kvalitatiivse tunnuse järgi kasutatakse χ^2-kriteeriumi samuti kui kvantitatiivsete tunnuste korral.

χ^2-kriteeriumi kasutatakse väga laialdaselt. Seejuures tuleb silmas pidada, et χ^2-kriteerium oleneb suurel määral vaadeldava kogumi suurusest. Selle kinnituseks on tabelis 10.4 arvutatud χ^2 tabelis 10.2 toodud variantide jaotuse hindamiseks, kusjuures nende esinemissagedust on vähendatud 100 korda. Kogumi struktuur jääb endiseks. Ei muutu ka aritmeetiline keskmine ja standardhälve, sest need suurused olenevad variantide väärtustest ja jaotumise struktuurist, mitte aga sageduste absoluutsest suurusest. Samaks jäävad ka normhälbed t_i ja neile vastavad funktsiooni $\psi(t)$ väärtused (vt. jaot. 4.8). Teoreetilise rea arvutamisel vajalik konstant $\frac{k\,\Sigma f}{\sigma}$

Tabel 10.4

χ^2-kriteeriumi arvutused

	f_i	f'_i	$f_i - f'_i$	$(f_i - f'_i)^2$	$\frac{(f_i - f'_i)^2}{f'_i}$
[illegible]	10	6	4	16	2,667
[illegible]	15	13	2	4	0,308
[illegible]	20	21	−1	1	0,048
[illegible]	25	28	−3	9	0,321
[illegible]	30	29	1	1	0,034
[illegible]	20	23	−3	9	0,391
[illegible]	15	15	0	0	0,000
[illegible]	10	9	1	1	0,111
[illegible]	5	3	2	4	1,333
Kokku	150	147	×	×	5,519

väheneb 100 korda, sest Σf on sada korda väiksem, teised tegurid on aga jäänud samaks. See konstant on 72,9927.

Sellest tulenevalt on ka teoreetilised sagedused 100 korda väiksemad varem arvutatuist (vt. tabelid 4.2 ja 10.2).

Tabelis 10.4 leitud χ^2-kriteerium on ligikaudu 100 korda väiksem tabelis 10.2 leitust.

Hüpoteesi $H_0: F(x) = F'(x;\ \bar{x},\ \sigma)$ kontrollimisel χ^2-kriteeriumi järgi, võttes olulisuse piiriks 0,01 selgub, et vabadusastmete arvuga 6 on χ^2 väärtus tabeli järgi 16,812. $\chi^2_{arv} < \chi^2_{0,01}$ (5,519<16,812). Nullhüpotees leiab seega kinnitamist. Sada korda suurema kogumi puhul see hüpotees kummutati, kuigi kogumi struktuur oli sama.

10.3. *z*-KRITEERIUM

z-kriteeriumi kasutatakse väljavõtukeskmise ja -osamäära erinevuse olulisuse hindamisel suurte väljavõtukogumite korral.

Väljavõtu ja üldkeskmise erinevuse hindamisel *z* väärtus leitakse järgmise valemiga:

$$z = \frac{(\tilde{x} - \bar{x})\sqrt{n}}{\sigma},$$

kus $\tilde{x}$ on väljavõtukeskmine;
$\bar{x}$ — üldkeskmine;
n — väljavõtukogumi elementide arv;
σ — üldkogumi standardhälve.

Arvutatud z-kriteeriumi võrreldakse teoreetilisega (vt. lisa 10) vastavalt hinnangu olulisuse määrale.

z-kriteeriumi arvutamist ja hüpoteesi kontrollimist selgitab järgnev näide.

Instituudi esimesel kursusel hinnati vastava testi abil üliõpilaste matemaatikaalaseid teadmisi 100 palli süsteemis. Kõigi vaadeldud üliõpilaste keskmine hinne oli 85, selle standardhälve 16. Täiendav test tehti 64 üliõpilasele ning keskmiseks hindeks saadi 88 palli. Tekib küsimus, kas väljavõtukogumisse sattusid matemaatikat oluliselt paremini tundvad üliõpilased või on erinevus juhuslik.

Kontrolli aluseks on nullhüpotees $H_0: \tilde{x} = \bar{x}$. Olulisuse määr on 0,05.

$$z = \frac{(\tilde{x} - \bar{x})\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(88 - 85)\sqrt{64}}{16} = 1{,}5$$

$z_{0,05}$ on tabeli järgi 1,96. Tabeli kasutamise

kohta tuleb märkida, et selles on toodud ühepoolne jaotuspind. Et näites on tegemist kahepoolsega, siis on usaldatavustõenäosus ühe poole kohta $1{,}00 - \frac{0{,}05}{2} = 0{,}975$ (vt. ka lisa 10).

$z < z_{0,05}$ $(1{,}5 < 1{,}96)$ ning hüpotees juhusliku erinevuse kohta leiab kinnitamist.

z-kriteeriumi kasutamisel väljavõtu- ja üldosamäära erinevuse olulisuse hindamisel leitakse järgmise valemiga:

$$z = \frac{\omega - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}.$$

kus ω on vaadeldava tunnusega elementide osamäär väljavõtukogumis;
p — sama üldkogumis;
n — väljavõtukogumi elementide arv.

Eeltoodud kriteeriumi arvutamist ja kasutamist iseloomustab järgnev näide. Suure tehase kaadrinõukonna ankeetide andmeil oskab vähemalt ühte võõrkeelt 12 protsenti töötajaist. 200 töötaja väljavõttelisel küsitlemisel aga selgus, et vastav suhtarv on 16 protsenti. Kas erinevus on juhuslik või on arvestusandmed vananenud ja vajavad kontrollimist?

$H_0: \omega = p$, olulisuse piirmäär 0,05, Siin tuleb kasutada ühepoolset kriteeriumi, sest hälbimine on ainult ühes suunas, $\omega > p$.

$$z = \frac{\omega - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \frac{0{,}16 - 0{,}12}{\sqrt{\frac{0{,}12 \cdot 0{,}88}{200}}} = \frac{0{,}04}{0{,}023} = 1{,}739.$$

Vastavalt tabelile $z_{0,05}=1{,}645$. $z>z_{0,05}$ ning nullhüpotees erinevuse juhuslikkuse kohta ei leia kinnitamist. Ilmselt on töötajate võõrkeelte oskus muutunud ning kaadriosakonnal tuleks oma andmeid täpsustada.

z-kriteeriumi väärtus oleneb väljavõtukogumi suurusest. Kui eeltoodud näite puhul oleks vaadeldud vaid 100 töötajat, siis tulemus oleks järgmine:

$$z=\frac{0{,}16-0{,}12}{\sqrt{\frac{0{,}12\cdot 0{,}88}{100}}}=\frac{0{,}04}{0{,}032}=1{,}25.$$

Sellisel juhul $z<z_{0,05}$ ning nullhüpoteesi erinevuse juhuslikkuse kohta võib lugeda kummutatuks. Selline tulemuste erinevus on sisuliselt loogiline. Väiksema väljavõtukogumi puhul on saadud näitaja juhuslikum kui suure väljavõtukogumi puhul. Väljavõtukogumi suurendamine vähendab eksimisriski.

Kahe väljavõtukeskmise võrdlemisel arvutatakse z-kriteeriumi järgmise valemiga:

$$z=\frac{\tilde{x}-\tilde{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_x}+\frac{s_y^2}{n_y}}}.$$

Hüpotees on, et $\bar{x}=\bar{y}$.

Vaatlusandmetest on teada n_x ja n_y, arvutada tuleb $\tilde{x}$ ja $\tilde{y}$ ning s_x^2 ja s_y^2. Aritmeetilise keskmise ja dispersiooni arvutamist on käsitletud vastavalt III ja IV peatükis. z-kriteeriumi arvutamist ja kasutamist iseloomustab järgnev näide. Kahes tsehhis valmistatakse sama liiki detaile. Detailide kaalu väljavõttelisel uurimisel selgus, et I tsehhis on 70 detaili keskmine kaal $\tilde{x}=70$ grammi, standardhälve $s_x=35$ grammi, II tsehhis 60 detaili keskmine kaal $\tilde{y}=75$ grammi, standardhälve $s_y=25$ grammi. Kas nende andmete alusel võib järeldada, et I ja II tsehhi detailide keskmine kaal üldkogumis oluliselt erineb.

$H_0: \bar{x}=\bar{y}$. Olulisuse määr 0,05.

$$z=\frac{\tilde{x}-\tilde{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_x}+\frac{s_y^2}{n_y}}}=\frac{70-75}{\sqrt{\frac{35^2}{70}+\frac{25^2}{60}}}=\frac{-5}{5{,}376}=-0{,}93$$

Tulemus on negatiivne, kuid see pole oluline. Oluline on vaid z absoluutväärtus. $|z|<z_{0,05}$. Tabeli järgi on $z_{0,05}=1{,}96$.

Püstitatud hüpotees leiab kinnitamist. Nende andmete järgi võib pidada mõlema tsehhi detailide keskmist kaalu üldkogumis võrdseks.

Kaks kuud hiljem tehtud vaatlusel olid andmed järgmised:

$n_x=60$, $n_y=65$,
$\tilde{x}=79$, $\tilde{y}=68$,
$s_x=30$, $s_y=25$.

$H_0: \bar{x}=\bar{y}$. Olulisuse määr 0,05.

$$z=\frac{79-68}{\sqrt{\frac{30^2}{60}+\frac{25^2}{65}}}=\frac{11}{4{,}962}=2{,}34.$$

Antud juhul on $z>z_{0,05}$ ja püstitatud hüpotees tuleb lugeda kummutatuks. Kahes tsehhis valmistatud detailide keskmine kaal on ilmselt erinev. Seda põhjustavad tegurid vajavad uurimist.

10.4. *F*-KRITEERIUM

Varieerumise erinevuse olulisuse hindamiseks kasutatakse *F*-kriteeriumi, mida selle jaotuse kindlaksmääraja järgi nimetatakse ka *Fisheri F*-kriteeriumiks. *F*-kriteeriumi kriitiliste väärtuste leidmiseks kasutatakse tavaliselt tabeleid. Vastav tabel on lühendatult toodud lisas 12.

F-kriteeriumi väärtus empiirilistel andmetel leitakse järgmise valemiga:

$$F=\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2},$$

kus σ_1^2 on suurema dispersiooni väärtus (näit. σ_x);

σ_2^2 — väiksema dispersiooni väärtus (näit. σ_y).

F-kriteeriumi kriitilise väärtuse leidmisel tuleb arvutada mõlema tunnuse jaotumise vabadusastmed: $n_x=k_x-1$ ja $n_y=k_y-1$, kus k_x ja k_y on vastavalt variantide x ja y arv (intervallide arv).

Kahe dispersiooni või standardhälbe võrdlemisel püstitatakse nn. nullhüpotees, et mõlemas vaadeldavas üldkogumis on dispersioonid ja järelikult ka standardhälbed võrdsed: $\sigma_x=\sigma_y$. Seda hüpoteesi kontrollitakse tavaliselt väljavõtukogumi andmete järgi, kusjuures väljavõtu dispersioonid ei ole võrdsed, $s_x^2\neq s_y^2$. Tekib küsimus erinevuse olulisuse kohta. Kui väljavõtu dispersioonide järgi leitud *F*-kriteerium on väiksem kui toodud *F*-kriteeriumi kriitiline väärtus, siis loetakse hüpotees kinnitatuks, vastasel juhul aga kummutatuks. *F*-kriteeriumi kasutamist iseloomustab järgnev näide.

Uute toodete näidiseid hinnati 100 palli süsteemis. Kahel hindamisel saadi järgmised tulemused:

$H(x)$: 57; 71; 76; 49; 70; 69; 59; 65; 26.
$H(y)$: 52; 85; 81; 63; 70; 52; 33; 83; 62.

Kas mõlemal juhul on tulemused võrdselt ühtlased või on ühes kogumis hälbimine keskmisest tunduvalt suurem?

H_0: $\sigma_x^2=\sigma_y^2$. Olulisuse määr 0,05.

Vaadeldavaid kogumeid iseloomustavad järgmised karakteristikud:

$k_x=9$; $k_y=9$;
$\bar{x}=60{,}2$; $\bar{y}=64{,}7$;
$\sigma_x=15{,}4$; $\sigma_y=16$;
$\sigma_x^2=237$; $\sigma_y^2=256$;

$$F=\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}=\frac{256}{237}=1{,}08.$$

Vastavalt vabadusastmetele $n_x=8$ ja $n_y=8$ ning usaldusosusele 0,95 (1,00 — 0,05) on *F*-kriteeriumi kriitiline väärtus tabeli järgi (vt. lisa 12) 3,44. $F<F_{kr}$ (1,08<3,44), püstitatud hüpotees leidis kinnitamist.

10.5. *t*-KRITEERIUM

Väikeste väljavõtukogumite keskmiste erinevuse olulisuse hindamisel kasutatakse *t*-kriteeriumi. Seda nimetatakse *t*-jaotuse kindlaksmääraja pseudonüümi järgi ka *Studenti t*-kriteeriumiks. *t*-kriteeriumi kriitilised väärtused on toodud vastavas tabelis (vt. lisa 11).

Võrdse dispersiooniga kogumite korral leitakse *t*-kriteeriumi väärtus vaatlusandmete alusel järgmise valemiga:

$$t=\frac{\tilde{x}-\tilde{y}}{\sqrt{k_x s_x^2+k_y s_y^2}}\sqrt{\frac{k_x k_y (k_x+k_y-2)}{k_x+k_y}},$$

kus $\tilde{x}$ on esimene väljavõtukeskmine;
$\tilde{y}$ — teine väljavõtukeskmine;
k_x — esimese väljavõtukogumi elementide arv;
k_y — teise väljavõtukogumi elementide arv;
s_x^2 — esimene väljavõtudispersioon;
s_y^2 — teine väljavõtudispersioon.

Empiirilise ja kriitilise t väärtuse võrdlemisel võetakse arvesse empiirilise t absoluutväärtus $|t|$.

Väikeste väljavõtukogumite keskmiste erinevuse olulisuse hindamist võib näitlikult iseloomustada eelmises jaotises (10.4) toodud näite alusel.

$H_0: \bar{x}=\bar{y}$. Olulisuse määr 0,05,

$$t=\frac{\tilde{x}-\tilde{y}}{\sqrt{k_x s_x^2+k_y s_y^2}}\sqrt{\frac{k_x k_y (k_x+k_y-2)}{k_x+k_y}}=$$

$$=\frac{60{,}2-64{,}7}{\sqrt{9\cdot 237+9\cdot 256}}\cdot\sqrt{\frac{9\cdot 9(9+9-2)}{9+9}}=$$

$$=\frac{-4{,}5}{\sqrt{4437}}\sqrt{\frac{1296}{18}}=-0{,}57.$$

Vabadusastmete arv $n=n_x+n_y-2=16$.

Tabeli järgi on t-kriteeriumi kriitiline väärtus 16 vabadusastme korral $t_{0,05}=2{,}12$. $|t|<t_{0,05}$ (0,57<2,12). Püstitatud hüpotees leiab kinnitamist.

Ebavõrdsete dispersioonide korral leitakse t-kriteerium ja vabadusastmete arv teiste valemite järgi:

$$t=\frac{\tilde{x}-\tilde{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{k_x}+\frac{s_y^2}{k_y}}},$$

$$n=\frac{\left(\frac{s_x^2}{k_x}+\frac{s_y^2}{k_y}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_x^2}{k_x}\right)^2}{k_x+1}+\frac{\left(\frac{s_y^2}{k_y}\right)^2}{k_y+1}}-2,$$

kus tähistus on sama, mis eespool.

Väikeväljavõtu keskmiste erinevuse olulisuse hindamist ebavõrdsete dispersioonide korral iseloomustab näide elektripirnide põlemiskestuse kohta.

Kontrolliti kahte järjestikku toodetud elektripirnide partiisid. Kummastki partiist võeti 10 pirni. Pirnide põlemiskestus oli järgmine (tundides):

x_i: 190; 220; 180; 160; 210; 200; 210; 190; 200; 170.

y_i: 150; 190; 270; 170; 190; 140; 260; 220; 150; 240.

Neid kogumeid iseloomustavad järgmised karakteristikud:

$k_x=10$; $k_y=10$;
$\tilde{x}=193$; $\tilde{y}=198$;
$s_x=17{,}916$; $s_y=44{,}879$;
$s_x^2=321$; $s_y^2=2014$.

Siin on ilmselt tegemist ebavõrdsete dispersioonidega. Seda võib kontrollida F-kriteeriumi abil (vt. jaot. 10.4).

$H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$. Olulisuse määr 0,05.

$$F = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} = \frac{2014}{321} = 6{,}274.$$

$n_x = 10 - 1 = 9$; $n_y = 10 - 1 = 9$. $F_{kr} = 3{,}18$.

$F > F_{kr}$ (6,27 > 3,18). Hüpotees dispersioonide mitteolulise erinevuse kohta on kummutatud.

Nüüd võib kontrollida hüpoteesi aritmeetiliste keskmiste erinevuse ebaolulisuse kohta.

$H_0: \bar{x} = \bar{y}$. Olulisuse määr 0,05.

$$t = \frac{\tilde{x} - \tilde{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{k_x} + \frac{s_y^2}{k_y}}} = \frac{193 - 198}{\sqrt{\frac{321}{10} + \frac{2014}{10}}} =$$

$$= \frac{-5}{15{,}28} = -0{,}33.$$

$$n = \frac{\left(\frac{s_x^2}{k_x} + \frac{s_y^2}{k_y}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_x^2}{k_x}\right)^2}{k_x + 1} + \frac{\left(\frac{s_y^2}{k_y}\right)^2}{k_y + 1}} - 2 =$$

$$= \frac{\left(\frac{321}{10} + \frac{2014}{10}\right)^2}{\frac{\left(\frac{321}{10}\right)^2}{11} + \frac{\left(\frac{2014}{10}\right)^2}{11}} - 2 =$$

$$= \frac{233{,}5^2}{\frac{32{,}1^2}{11} + \frac{201{,}4^2}{11}} - 2 = \frac{54522{,}25}{3781{,}12} - 2 =$$

$$= 14{,}4 - 2 = 12{,}4.$$

Tabelis on t-kriteeriumi kriitilised väärtused toodud vaid täisarvuliste vabadusastmete järgi, mistõttu murdarvu esinemisel tuleb kasutada interpoleerimist.

Vabadusastmed	$t_{0,05}$	
12,0	2,179	
12,4	2,168	(arvutatud)
13,0	2,160	

Käesoleval juhul poleks seda vaja tehagi, sest $|t| = 0{,}33 < 2{,}168$ ja $|t| < 2{,}160$. Võib väita, et kahe elektripirnide partii keskmise põlemiskestuse vahel ei ole olulist erinevust.

Tabel 10.5

Üliõpilaste võõrkeele oskus I ja II semestri lõpul

Jrk. nr.	Hinne I semestri lõpul (x)	Hinne II semestri lõpul (y)	Hinde hälve (d)	d^2
1	76	81	5	25
2	71	85	14	196
3	62	61	−1	1
4	62	71	9	81
5	71	66	−5	25
6	80	85	5	25
7	68	79	11	121
8	75	81	6	36
9	67	79	12	144
10	51	66	15	225
Kokku	×	×	71	879

t-kriteeriumi saab kasutada ka väikese variantide kogumi väärtuste muutumise olulisuse hindamiseks. Sellisel juhul t-kriteerium leitakse valemiga

$$t=\frac{\Sigma d}{\sqrt{\frac{k\,\Sigma d^2-\Sigma d^2}{k-1}}},$$

kus d on variantide väärtuste hälbed;

k — variandipaaride arv.

Vabadusastmete arv $n=k-1$.

Arvutamist iseloomustab näide 10 üliõpilase võõrkeele oskuse muutumise kohta I ja II semestri lõpul. Hindamisel kasutati 100-palli süsteemi ning saadi tabelis 10.5 toodud tulemused.

$H_0: \bar{x}=\bar{y}$.

$$t=\frac{\Sigma d}{\sqrt{\frac{k\,\Sigma d^2-(\Sigma d)^2}{k-1}}}=\frac{71}{\sqrt{\frac{10\cdot 879-71^2}{10-1}}}=$$

$$=\frac{71}{20{,}41}=3{,}48.$$

Kui võtta olulisuse määraks 0,05, siis $t_{0,05}=2{,}262$. Vaadeldaval juhul $t>t_{0,05}$ $(3{,}48>2{,}262)$. Nullhüpotees tuleb lugeda kummutatuks. Üliõpilaste keskmine võõrkeele oskus on paranenud.

XI STATISTILISED PROGNOOSID

11.1. STATISTILISE PROGNOOSI MÕISTE

Statistiliste meetoditega uuritakse peamiselt mitmesuguste nähtuste arengut minevikus ja seisundit olevikus, kuid neid saab kasutada ka nähtuste edasise arengu iseloomustamiseks. Prognoosimise metodoloogias on statistiliste meetodite kasutamisel küllaltki oluline koht.

Statistiline prognoosimine tugineb senise arengutendentsi kindlaksmääramisele ja selle ekstrapoleerimisele tulevikku, mistõttu seda käsitletaksegi sageli kui prognoosimist ekstrapoleerimismeetoditega, toonitamata nende kuulumist statistiliste meetodite hulka.

Statistika üldteooriast on teada, et nähtuse arengut saab iseloomustada mitmeti: keskmise kasvutempo, üldist arengutendentsi iseloomustava trendi või funktsiooni, seoses mõne teise nähtuse arenguga regressioonivõrrandiga jne. Vastavalt sellele on ka mitmesuguseid võimalusi ekstrapoleerimiseks. Väga harva on võimalik sedastada, et vaadeldava nähtuse edasine areng toimub mingi kindla funktsiooni alusel ning prognoosi leidmiseks ekstrapoleerimise teel saab kasutada vaid seda funktsiooni. Tavaliselt leitakse nähtust iseloomustava tunnuse perspektiivsed väärtused mitme funktsiooni alusel. Nii saadakse teatav hulk prognooshinnanguid. Prognoos määratakse kindlaks täiendava analüüsi alusel (eks-

pertiisi teel). Seetõttu tuleb allpool esitatud statistilisi prognoosimise meetodeid vaadelda eelkõige prognooshinnangute leidmise meetoditena.

Eristatakse lühi-, keskmise- ja pikaajalisi prognoose. Lühiajaline prognoos hõlmab osa prognoosi koostamise aastast või järgmist aastat. Keskmiseajaliste prognoosidega käsitletakse kaheks kuni viieks aastaks koostatud prognoose. Pikema aja peale koostatud prognoosid on pikaajalised.

Statistilisel prognoosimisel on oluline õigesti valida aegrida, mille järgi leitakse ekstrapoleerimisfunktsioon. Paljud autorid leiavad, et see peab olema võimalikult pikk. Puhteoreetiliselt võttes on selline seisukoht õige, kuid praktiliste ülesannete lahendamisel selgub sageli, et teatava pika perioodi alguses oli vaadeldava nähtuse üldine arengutendents veel ebaühtlane, mingist aastast või kuust alates on aga välja kujunenud küllalt ühtlane arengutendents. Kui on teada, et selline olukord oli tingitud erilistest teguritest, siis ei ole õige nende mõju tulevikku üle kanda. Lähteaegrea pikkuse kohta ei saa anda kindlat soovitust, selle peab kindlaks määrama prognoosija lähteandmete põhjaliku analüüsi alusel. Eesti NSV teeninduse arengu analüüsimisel ja prognoosimisel saadud kogemused näitasid, et 1965. aastale eelnenud aastatel ei olnud üksikute teenindusharude arengutendents veel kuigi ühtlane, kaheksandal ja üheksandal viisaastakul aga oli see juba võrdlemisi stabiilne. Seetõttu on teenindusharude arengu prognoosimisel otstarbekas tugineda nende viie aastakute andmetele.

Statistiliseks prognoosimiseks ekstrapoleerimise teel kasutatavate funktsioonide hulk on võrdlemisi suur. Allpool on toodud osa neist, eelkõige lihtsamad.

Prognooshinnangute leidmisel kasutatakse lähteaegridadena nii moment- kui ka perioodridu. Vastavalt sellele saadakse ka hinnangud mingite eesseisvate momentide (momendi) või perioodide (perioodi) kohta. Kõige sagedamini leitakse prognooshinnangud teatavate aastate kohta. Seetõttu on ekstrapoleerimisfunktsioonide käsitlemisel vaadeldud perioodridu ja ajaühikuks võetud aasta.

Tuleb märkida, et statistiliste prognooside leidmine on enamasti seotud päris rohkete arvutustega, mille tegemine käsitsi võtab palju aega. Tänapäeval on aga olemas programmid vajalike funktsioonide ja nende hinnangute leidmiseks raali abil, mis tunduvalt lihtsustab prognoosijate tööd.

11.2. EKSPONENTFUNKTSIOON

Majanduslike nähtuste ajalise muutumise iseloomustamiseks kasutatakse sageli keskmist kasvutempot, mis on ahelkasvutempode geomeetriline keskmine. Selle alusel saadakse nähtuse arengut väljendav eksponentfunktsioon:

$$y_t = y_0 \bar{t}^t,$$

kus y_t on uuritava tunnuse teoreetiline väärtus t-ndal aastal;
y_0 — sama tunnuse väärtus alusaastal;
$\bar{t}$ — keskmine kasvutempo;
t — aeg (momendi või perioodi järjekorranumber arvestamata alusaastat).

Tabel 11.1

Kolhoosi «N» kartulisaagi prognooshinnangud kuni 1985. aastani

Aasta	Kartulisaagi prognooshinnang (tonnides)	Kartulisaagi absoluutne aheljuurdekasv (tonnides)
1978	636	36
1979	674	38
1980	715	41
1981	757	42
1982	803	46
1983	851	48
1984	902	51
1985	956	54

Kuna empiirilise aegrea esimese elemendi väärtuse korrutamisel suurusega $\bar{i}^t$, kus t on rea viimase elemendi järjekorranumber, saadakse rea viimase elemendi väärtus, siis võib ekstrapoleerimisel võtta suuruseks y_0 viimatimainitu ning aastate järjekorranumbreid arvestada ainult prognoosiperioodi kohta.

Kui kolhoosi «N» kartulisaak oli 1977. aastal 600 tonni ja senine keskmine kasvutempo 1,06, siis leitakse prognooshinnangud järgmise funktsiooni järgi:

$$y_t = 600 \cdot 1{,}06^t.$$

Kolhoosi «N» kartulisaagi prognooshinnangud ja nende aastajuurdekasvud kuni 1985. aastani on toodud tabelis 11.1.

Ekstrapoleerimisel eksponentfunktsiooni järgi absoluutsed juurdekasvud pidevalt suurenevad. Selline nähtuse muutumine on enamasti mõeldav vaid suhteliselt lühikese aja jooksul.

Ekstrapoleerimisel kaugemasse tulevikku muutuvad vaadeldava suuruse väärtused ebareaalseteks.

Tabelis 11.1 toodud absoluutsete juurdekasvude vahed (teist järku diferentsid) on enam-vähem võrdsed, millest järeldub, et perspektiivne arengutendents on vormilt lähedane teist järku paraboolile.

11.3. LINEAARFUNKTSIOON

Nähtust iseloomustava suuruse väärtuse juurdekasvu püsivuse korral (esimest järku diferentsid on enam-vähem võrdsed) iseloomustab nähtuse üldist arengutendentsi sirge ehk lineaarfunktsioon (vt. jaot. 8.3.2):

$$y_t = a + bt,$$

kus y_t on uuritava tunnuse teoreetiline väärtus t-ndal aastal;

a ja b — empiiriline rea tasandamisel leitud võrrandi parameetrid;

t — aeg (aasta järjekorranumber).

Kui vaadeldava nähtuse analüüsimisel on üldist arengutendentsi iseloomustav lineaarfunktsioon leitud, siis saab prognooshinnangu (hinnangute) leidmiseks kasutada seda funktsiooni ka teisendatud kujul:

$$y_t = y_0 + bt,$$

kus y_0 on tasandatud rea viimase elemendi väärtus;

t — prognoosiperioodi aasta järjekorranumber.

Esimese elemendi valik on prognoosimisel

omaette probleem. Selle valimisel tasandatud reast on teatavaks eelduseks rea elementide empiiriliste väärtuste võimalik hälbimine rea elementide teoreetilistest väärtustest ka tulevikus. Kuid võib ka eeldada, et hälbimise põhjused on välja selgitatud ja neid püütakse edaspidi vältida. Siis tuleks ekstrapoleerimisel lähtuda empiirilise rea viimase elemendi väärtusest.

Ekstrapoleerimine lineaarfunktsiooni järgi on märksa lihtsam kui esktrapoleerimine kõverjoone funktsiooni alusel. Sageli on see ka loogiliselt põhjendatum. Seetõttu kasutatakse progmooshinnangute leidmiseks sirget ka siis, kui üldist arengutendentsi iseloomustavas trendis on väike kõverus.

Tasandatud rea vastavust empiirilisele reale saab kontrollida mitmeti. Üks lihtsamaid võtteid on aproksimeerimisvea arvutamine. See leitakse järgmise valemiga:

$$v=\frac{1}{n}\sum\frac{|y_i-y_t|}{y_i}100,$$

kus v on aproksimeerimisviga (protsentides);
n — rea elementide arv;
y_i — rea elementide empiirilised väärtused;
y_t — rea elementide teoreetilised väärtused.

Aproksimeerimisvea lubatava suuruse kohta on mitmesuguseid arvamusi. Hea on, kui ta ei ole üle 5 protsendi, kuid mõned autorid peavad majandusnähtuste puhul vastuvõetavaks ka kuni 10-protsendilist aproksimeerimisviga.

Tasandatud rea vastavust empiirilisele reale saab iseloomustada ka funktsiooni süstemaatilise veaga, mis leitakse järgmiselt:

$$\eta=s\sqrt{1-r^2},$$

kus η on süstemaatiline viga;
s — standardviga;
r^2 — determinatsioonikordaja (vt. jaot. 7.10).

Standardviga

$$s=\sqrt{\frac{\Sigma(y_i-y_t)^2}{n}}.$$

Funktsiooni süstemaatilist viga saab kasutada mitme funktsiooni võrdlemiseks. Eelistada tuleb väiksema süstemaatilise veaga funktsiooni. Kui piirdutakse vaid ühe funktsiooni leidmisega, siis saab teatava ettekujutuse funktsiooni sobivusest süstemaatilise vea ja rea elementide keskmise väärtuse suhte alusel.

Tasandatud rea vastavust empiirilisele reale hinnatakse ka funktsiooni statistilise usaldatavustõenäosuse järgi vastavalt R. *Fisheri F*-kriteeriumile. Viimase empiiriline väärtus leitakse ülddispersiooni ja jääkdispersiooni suhtena:

$$F_{emp}=\frac{\sigma^2}{\sigma_j^2}=\frac{\Sigma(y_i-\bar{y})^2(n-p)}{(n-1)\Sigma(y_i-y_t)^2},$$

kus F_{emp} on F-kriteeriumi empiiriline väärtus;
σ^2 — ülddispersioon;
σ_j^2 — jääkdispersioon;
y_i — aegrea elementide empiirilised väärtused;
$\bar{y}$ — aegrea elementide empiiriliste väärtuste keskmine;
y_t — aegrea elementide teoreetilised väärtused;
n — aegrea elementide arv;
p — võrrandi parameetrite arv.

Arvutatud F-kriteeriumi väärtust võrreldakse

selle kriteeriumi kriitiliste väärtustega (F_{kr}) tabeli järgi vastavalt vabadusastmetele $n-1$ ja $n-p$. Usaldatavustõenäosuse ülemine piir leitakse tabeli realt, kus vahe $F_{emp}-F_{kr}$ on minimaalne ($F_{emp}>F_{kr}$). Lisas 12 toodud F-kriteeriumi tabel selleks ei sobi, kuna seal on toodud vaid kaks võimalikku tõenäosust. Tuleb kasutada eri tabeleid [näit. 19]. Majandusnähtuste uurimisel võib funktsiooni usaldatavustõenäosust P pidada küllalt heaks kui $P>0{,}750$.

Esitatud aegridade sobivuse hindamist võib pidada elementaarseks. Põhjalikumal analüüsimisel tuleks kontrollida ka autokorrelatsiooni, korrelatsioonikoefitsiendi ja regressioonikoefitsiendi usaldatavust, viitaega jne. [20]. Eriti oluline on see siis, kui uuritakse kahe aegrea elementide seose rangust ja vormi.

Kahe aegrea elementide seost väljendava siirge regressioonivõrrand leitakse samuti kui ühe aegrea elementide ja aja teguri seost väljendava siirge regressioonivõrrand (aja teguri t asemel on teise aegrea elementide väärtused x_t).

Aegrea tasandamise näide on toodud eespool (vt. jaot. 8.3.2), mistõttu siin on piirdutud vaid leitud funktsiooni sobivuse hindamise ja prognooshinnangute leidmise näitega.

«N» rajooni teenindustööde mahtu aastatel 1965—1974 iseloomustavad tabeli 11 veerus 3 toodud andmed. Selle aegrea tasandamine siirgega annab järgmise funktsiooni:

$$y_t = 2767{,}4 + 170{,}345t.$$

Selle funktsiooni järgi leitud teenindustööde mahu teoreetilised väärtused on tabeli 11.2 veerus 4. Sama tabeli järgmistes veergudes on toodud osa arvutusi (tabelis on ümardatud arvud),

«N» rajooni teenindustööde tegelik tööde maht (y_i) ja tasandamisel siirgega leitud teoreetiline tööde maht (y_t) aastatel 1965—1974 (tuh. rbl.) ning funktsiooni hindamise arvutused

Aasta	t	y_i	y_t	$y_i - y_t$	$\frac{\lvert y_i - y_t \rvert}{y_i}$	$(y_i - y_t)^2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1965	1	2888	2938	—50	0,0172	2500	—816	665 856
1966	2	3100	3108	—8	0,0026	64	—604	364 816
1967	3	3261	3278	—17	0,0053	289	—443	196 249
1968	4	3494	3449	45	0,0129	2025	—210	44 100
1969	5	3613	3619	—6	0,0017	36	—91	8 281
1970	6	3822	3789	33	0,0085	1089	118	13 924
1971	7	4028	3960	68	0,0169	4624	324	104 976
1972	8	4176	4130	46	0,0110	2116	472	222 784
1973	9	4268	4300	—32	0,0076	1024	564	318 096
1974	10	4393	4471	—78	0,0177	6084	689	474 721
Kokku	×	×	×	×	0,1014	19851	0	2 413 803

Aproksimeerimisviga (protsentides) on selle rea puhul: .

$$v=\frac{1}{n}\sum\frac{|y_i-y_t|}{y_i}\cdot 100=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot 0{,}1014\cdot 100=1{,}014\%.$$

Standardviga

$$s=\sqrt{\frac{\Sigma(y_i-y_t)^2}{n}}=\sqrt{\frac{19851}{10}}\approx 44{,}6.$$

Korrelatsiooni- ja determinatsioonikordajate arvutuskäiku ei ole siin toodud (vt. 7.6.2 ja 7.10). Need on vastavalt:

$r=0{,}9959$ ja $r^2=0{,}9918$.

Süstemaatiline viga

$$\eta=s\sqrt{1-r^2}=44{,}6\sqrt{1-0{,}9918}=4{,}04.$$

R. *Fisheri* F-kriteeriumi empiirilise väärtuse leidmiseks tuleb veel arvutada aegrea elementide ja nende keskmise (3704) hälvete ruutude summa (tabelis 11.2 veerg 9).

$$F_{emp}=\frac{\Sigma(y_i-\bar{y})^2(n-p)}{(n-1)\Sigma(y_i-y_t)^2}=$$

$$=\frac{2\,413\,803(10-2)}{(10-1)19851}=108{,}1.$$

Vastavalt tabelile $F_{kr}=59{,}4$,
millest järeldub, et funktsiooni usaldatavustõenäosus P on vahemikus

$0{,}900<P<0{,}950$.

Kõik arvutatud hinnangud viitavad sellele, et käesoleval juhul on sirge funktsioon tasandamiseks küllalt sobiv. Kui eeldada, et «N» rajooni teenindustööde maht kasvab ka tulevikus sirgjooneliselt, siis võib leida selle funktsiooni aluseil ka perspektiivse tööde mahu prognoosi (või vähemalt prognooshinnangud). Keskmise-ajalise prognooshinnangu arvutamisel on otstarbekas alusaastaks (y_0) võtta 1974. aasta tegelik tööde maht:

$$y_t=4393+170t,$$

kus t on aasta järjekorranumber prognoosiperioodil.

Ekstrapoleerimine annab järgmised «N» rajooni teenindustööde mahu prognooshinnangud (tuh. rbl.): 1980. a. — 5413, 1985. a. — 6263, 1990. a. — 7113.

11.4. LOGISTILINE FUNKTSIOON

Paljude majandusnähtuste tunnuste väärtused ei kasva lõpmatuseni, vähemalt mitte ühtlaselt. Aja jooksul nende kasv aeglustub ja nad lähenevad teatavale asümptoodile. Sellist arengut väljendab näiteks logistiline funktsioon. Logistilise funktsiooni kasutamiseks ajaliselt muutuvate nähtuste iseloomustamisel on antud mitmeid soovitusi. G. Tintner esitab logistilise funktsiooni allpool toodud kujul ja soovitab oma meetodit selle parameetrite leidmiseks [21]:

$$y_t=\frac{k}{1+\beta e^{-\alpha t}},$$

kus y_t on uuritava tunnuse väärtus t-ndal aastal;

k — logistilise kõvera ülemine asümptoot;
e — naturaallogaritmi alus;
α ja β — võrrandi parameetrid;
t — aeg (aasta järjekorranumber).

Logistilise funktsiooni parameetrite leidmine on seotud paljude suurt täpsust nõudvate arvutustega ja ühtlasi suurte ajakuludega. Majandusteaduskandidaat R. Renter koostas algoritmi ülesande lahendamiseks raalil ning NSVL TA Majandusmatemaatika Keskinstituudi Eesti Filiaalis on välja töötatud vastav programm raali «Ural 11» jaoks, mis tunduvalt lihtsustab logistilise funktsiooni parameetrite leidmist, samuti ka prognoos-hinnangute arvutamist selle funktsiooni järgi.

F. Mills soovitab kasutada logistilist funktsiooni järgmisel muudetud kujul [22]:

$$\frac{1}{y_t}=a+bc^t,$$

kus y_t on uuritava tunnuse väärtus t-ndal aastal;

a, b ja c — funktsiooni tundmatud parameetrid;
t — aeg (aasta järjekorranumber arvestatamata alusaastat).

Ka siin on küllalt palju arvutusi, kuid need on lihtsamad kui eelmise funktsiooni puhul.

Funktsiooni parameetrid a, b ja c leitakse järgmiselt:

$$c^n=\frac{d_2}{d_1},$$

$$b=\frac{d_1(c-1)}{(c^n-1)^2} \text{ ja}$$

$$a=\frac{1}{n}\left(S_1-\frac{d_1}{c^n-1}\right),$$

Tabel III.3

«R» rajooni teenindustööde maht ühe inimese kohta aastail 1966—1974 (rbl.) ning selle aegrea logistilise kõveraga tasandamise arvutused

Aasta	Aasta järjekorra number t	Tööde maht inimese kohta (rbl.) y_i	$\frac{1000}{y_i}$	Osasummad S	c^t	bc^t	$a+bc^t=\frac{1000}{y_t}$	y_t
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1966	0	17	59		1,0000	37,32	57,71	17,3
1967	1	20	50	$S_1=154$	0,8181	30,53	50,92	19,6
1968	2	22	45		0,6693	24,98	45,37	22,0
1969	3	24	42		0,5475	20,43	40,82	24,5
1970	4	27	37	$S_2=112$	0,4479	16,72	37,11	26,9
1971	5	30	33		0,3665	13,68	34,07	29,4
1972	6	31	32		0,2998	11,19	31,58	31,7
1973	7	33	30	$S_3=89$	0,2453	9,15	29,54	33,9
1974	8	37	27		0,2006	7,49	27,88	35,9

kusjuures

$d_1 = S_2 - S_1$ ja
$d_2 = S_3 - S_2$,

kus S_1, S_2 ja S_3 on vastavalt aegrea esimese, teise ja kolmanda kolmandiku elementide pöördväärtuste $\left(\frac{1}{y_t}\right)$ summa (vt. tabelis 11.3 veerg 5),

n — aegrea elementide arv ühes kolmandikus.

Arvutuste lihtsustamiseks võib aegrea elementide pöördväärtused korrutada 10-ga mingis vabalt võetud arvutajale sobivas astmes.

Funktsiooni parameetrite arvutamist iseloomustab tabelis 11.3 toodud näide «R» rajooni ühele inimesele osaneva teenindustööde mahu kohta aastatel 1966—1974.

Tabeli 11.3 andmete alusel saab teha järgmised arvutused:

$$d_1 = S_2 - S_1 = 112 - 154 = -42;$$
$$d_2 = S_3 - S_2 = 89 - 112 = -23;$$
$$c^n = c^3 = \frac{d_2}{d_1} = \frac{-23}{-42} = 0{,}5476;$$
$$c = \sqrt[3]{0{,}5476} = 0{,}8181;$$
$$b = \frac{d_1(c-1)}{(c^n-1)^2} = \frac{-42(-0{,}1819)}{(0{,}5476-1)^2} = 37{,}32;$$
$$a = \frac{1}{n}\left(S_1 - \frac{d_1}{c^n - 1}\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(154 - \frac{-42}{0{,}5476 - 1}\right) = 20{,}39.$$

Järelikult iseloomustab vaadeldavat aegrida järgmine logistiline funktsioon:

$$\frac{1000}{y_t} = 20{,}39 + 37{,}32\,(0{,}8181^t).$$

Ekstrapoleerimisel on t väärtusteks 1980. a. — 14, 1985. a. — 19 ja 1990. a. — 24 ning prognooshinnangud vastavalt 44,2; 47,1 ja 48,3 rubla.

Korrutis bc^t läheneb pidevalt nullile. Ülemine asümptoot oleneb seega suurusest a. Vaadeldava näite puhul on see $1000 : a = 1000 : 20{,}39 \approx 49$ rubla.

Logistilise funktsiooni sobivust vaadeldava nähtuse arengu prognooshinnangute leidmiseks tuleb kindlaks määrata selle nähtuse sisulise analüüsi alusel.

11.8. GOMPERTZI FUNKTSIOON

Majanduslike nähtuste arengu prognooshinnangute leidmiseks võib mõni kord osutuda sobivaks *Gompertzi kõver* [22]. Ekstrapoleerimisel mainitud kõvera funktsiooni järgi vaadeldava tunnuse väärtuste absoluutsed juurdekasvud järk-järgult väheneva d, kuid kasv jätkub pidevalt. *Gompertzi* kõvera funktsioon on järgmine:

$$y_t = ab^{c^t},$$

kus y_t on uuritava tunnuse teoreetilised väärtused t-ndal aastal;

a, b ja c — funktsiooni parameetrid;

t — aeg (aasta järjekorranumber arvestamata alusaastat).

Praktiliselt on seda funktsiooni parem kasutada logaritmitud kujul:

$$\log y_t = \log a + (\log b)\, c^t.$$

Log a on sisuliselt logaritm tunnuse **maksimumväärtusest**, millele kõver läheneb.

Funktsiooni parameetrite a, b ja c leidmine toimub analoogiliselt logistilise funktsiooni parameetrite leidmisele. Uuritava tunnuse pöördväärtuste asemel esinevad arvutustes selle logaritmid,

$$c^n = \frac{d_2}{d_1};$$

$$\log b = \frac{d_1(c-1)}{(c^n-1)^2};$$

$$\log a = \frac{1}{n}\left(S_1 - \frac{d_1}{c^n-1}\right);$$

$$d_1 = S_2 - S_1;$$
$$d_2 = S_3 - S_2,$$

kus S_1, S_2 ja S_3 on vastavalt aegrea esimese, teise ja kolmanda kolmandiku elementide väärtuste logaritmide ($\log y_i$) summad;

n — aegrea elementide arv ühes kolmandikus.

Gompertzi funktsioon logaritmitud kujul on leitud jaot. 11.4 toodud näite alusel (vt. tabelid 11.3 ja 11.4).

Tabeli 11.4 andmete alusel:

$$d_1 = S_2 - S_1 = 4{,}2887 - 3{,}8738 = 0{,}4149;$$
$$d_2 = S_3 - S_2 = 4{,}5781 - 4{,}2887 = 0{,}2894.$$

Kui $d_2 < d_1$, siis on empiirilise rea absoluutsed juurdekasvud rea lõpuosas väiksemad kui rea alguses.

Tabel 11.4

«R» rajooni teenindustööde maht ühe inimese kohta aastatel 1966—1974 (rbl.) ning selle aegrea Gompertzi kõveraga tasandamise arvutused

Aasta	Aasta järjekorra number t	Tööde maht inimese kohta (rbl.) y_i	$\log y_i$	Osasummad S	c^t	$(\log b)c^t$	$\log y_t$	y_t
1966	0	17	1,2304		1,0000	—0,5133	1,2351	17,2
1967	1	20	1,3010	$S_1=3{,}8738$	0,8868	—0,4552	1,2932	19,6
1968	2	22	1,3424		0,7864	—0,4037	1,3447	22,1
1969	3	24	1,3802		0,6974	—0,3580	1,3904	24,6
1970	4	27	1,4314	$S_2=4{,}2887$	0,6184	—0,3174	1,4310	26,9
1971	5	30	1,4771		0,5484	—0,2815	1,4669	29,3
1972	6	31	1,4914		0,4864	—0,2497	1,4987	31,5
1973	7	33	1,5185	$S_3=4{,}5781$	0,4313	—0,2214	1,5270	33,7
1974	8	37	1,5682		0,3825	—0,1963	1,5521	35,7

Tabel 11.5

«R» rajooni ühele inimesele osaneva teenindustööde mahu prognooshinnangute arvutused Gompertzi kõvera järgi (rbl.)

Aasta	Aasta järjekorra number t	c^t	$(\log b)c^t$	$\log y_t$	y_t
1980	14	0,1860	—0,0955	1,6529	45,0
1985	19	0,1020	—0,0524	1,6960	49,7
1990	24	0,0560	—0,0287	1,7197	52,5

$$c^n = c^3 = \frac{d_2}{d_1} = \frac{0{,}2894}{0{,}4149} = 0{,}6975;$$

$$c = \sqrt[3]{0{,}6975} = 0{,}8868;$$

$$\log b = \frac{d_1(c-1)}{(c^n-1)^2} = \frac{0{,}4149\,(0{,}8868-1)}{(0{,}6975-1)^2} =$$

$$= -0{,}5133;$$

$$\log a = \frac{1}{n}\left(S_1 - \frac{d_1}{c^n-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(3{,}8738 - \frac{0{,}4149}{-0{,}3025}\right) = 1{,}7484.$$

Seega

$$\lg y_t = 1{,}7484 - 0{,}5133\,(0{,}8868^t).$$

Ekstrapoleerimisarvutused on toodud tabelis 11.5.

Suuruse $\log a$ järgi võib leida y_t teoreetilise maksimaalväärtuse, mis käesoleva näite korral on 56 rubla.

11.6. PROGNOOSI KINDLAKSMÄÄRAMINE

Statistiliseks ekstrapoleerimiseks võib kasutada veel mitmesuguseid muid meetodeid [23]. Eelmistes paragrahvides esitatud statistilised prognooshinnangute leidmise meetodid andsid vaid üldise ülevaate statistilisest prognoosimisest.

Statistiliste prognooshinnangute leidmine on sageli palju aega nõudev töö, kuid see on siiski vaid üks statistilise prognoosimise etapp. Kõige tähtsam etapp on prognoosi või mitme prognoosivariandi kindlaksmääramine. Seda peavad tegema vaadeldavat nähtust hästi tundvad spetsialistid, kes oskavad hinnata ka nende tegurite mõju, mis ei ole leidnud kajastamist analüüsitud aegridades.

Heaks abimaterjaliks võivad olla mitmesugused normatiivid. Normatiivne prognoosimine on üks prognoosimise meetodeid, kus prognoosid leitakse mitmesuguste tehniliselt, majanduslikult või füsioloogiliselt põhjendatud perspektiivsete normatiivide või normide alusel. Sageli kasutatakse ka statistilise analüüsi alusel leitud norme. Seejuures tuleb õigesti hinnata nende normide sobivust tulevikus.

Täiendavate hinnangute saamiseks kasutatakse ka eksperthinnangute meetodit. Viimase kasutamine on prognoosimisel võrdlemisi otstarbekas. Selle meetodi puhul saadakse prognooshinnangud ekspertide küsitlemise teel. Meetodi rakendamise kohta on akadeemik N. P. Fedorenko esitanud järgmised üldprintsiibid:

a) hinnangud tuleb saada vastava ala tunnustatud ekspertidelt võimalikult süstematiseeritud kujul, mis võimaldab nende üldistamist;

b) ühe või teise hüpoteesi «tõepärasust» hindavaid eksperte võib vaadata «musta kastina», eeldades, et vajalikult suure arvu ekspertide arvamus iseloomustab küllalt täpselt uuritavat küsimust;

c) selleks et saada ekspertide arvamused maksimaalselt süstematiseeritud vormis, tuleb neile seada täpselt määritletud ülesanne;

d) ekspertide valimiseks, neile ülesande püstitamiseks ja nende järelduste süstematiseerimiseks peab olema vastav metoodika, prognoosi koostavas organis aga seda metoodikat rakendav grupp. [24]

Eksperthinnangute töötlemisel kasutatakse statistilisi meetodeid (keskmiste ja variatsiooninäitarvude leidmine, üldise arengutendentsi kindlaksmääramine jne.).

Eksperthinnangute meetodit saab kasutada ka statistiliste prognooshinnangute sobivuse hindamisel ning prognoosi kindlaksmääramisel.

TÄISARVUDE RUUDUD, KUUBID, RUUT- JA KUUPJUURED

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
1	1	1	1,0000	1,0000	21	441	9 261	5826	7589
2	4	8	4142	2599	22	484	10 648	6904	8020
3	9	27	7321	4422	23	529	12 167	7958	8439
4	16	64	2,0000	5874	24	576	13 824	8990	8845
5	25	125	2361	7100	25	625	15 625	5,0000	9240
6	36	216	4495	8171	26	676	17 576	0990	9625
7	49	343	6458	9129	27	729	19 683	1962	3,0000
8	64	512	8284	2,0000	28	784	21 952	2915	0366
9	81	729	3,0000	0801	29	841	24 389	3852	0723
10	100	1 000	1623	1544	**30**	900	27 000	4772	1072
11	121	1 331	3166	2240	31	961	29 791	5678	1414
12	144	1 728	4641	2894	32	1 024	32 768	6569	1748
13	169	2 197	6056	3513	33	1 089	35 937	7446	2075
14	196	2 744	7417	4101	34	1 156	39 304	8310	2396
15	225	3 375	8730	4662	35	1 225	42 875	9161	2711
16	256	4 096	4,0000	5198	36	1 296	46 656	6,0000	3019
17	289	4 913	1231	5713	37	1 369	50 653	0828	3322
18	324	5 832	2426	6207	38	1 444	54 872	1644	3620
19	361	6 859	3589	6684	39	1 521	59 319	2450	3912
20	400	8 000	4721	7144	**40**	1 600	64 000	3246	4200

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
41	1 681	68 921	4031	4482	61	3 721	226 981	8102	9365
42	1 764	74 088	4807	4760	62	3 844	238 328	8740	9579
43	1 849	79 507	5574	5034	63	3 969	250 047	9373	9791
44	1 936	85 184	6332	5303	64	4 096	262 144	8,0000	4,0000
45	2 025	91 125	7082	5569	65	4 225	274 625	0623	0207
46	2 116	97 336	7823	5830	66	4 356	287 496	1240	0412
47	2 209	103 823	8557	6088	67	4 489	300 763	1854	0615
48	2 304	110 592	9282	6342	68	4 624	314 432	2462	0817
49	2 401	117 649	7,0000	6593	69	4 761	328 509	3066	1016
50	2 500	125 000	0711	6840	70	4 900	343 000	3666	1213
51	2 601	132 651	7,1414	3,7084	71	5 041	357 911	4261	1408
52	2 704	140 608	2111	7325	72	5 184	373 248	4853	1602
53	2 809	148 877	2801	7563	73	5 329	389 017	5440	1793
54	2 916	157 464	3485	7798	74	5 476	405 224	6023	1983
55	3 025	166 375	4162	8030	75	5 625	421 875	6603	2172
56	3 136	175 616	4833	8259	76	5 776	438 976	7178	2358
57	3 249	185 193	5498	8485	77	5 929	456 533	7750	2543
58	3 364	195 112	6158	8709	78	6 084	474 552	8318	2727
59	3 481	205 379	6811	8930	79	6 241	493 039	8882	2908
60	3 600	216 000	7460	9149	**80**	6 400	512 000	9443	3089

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
81	6 561	531 441	9,0000	3267	91	8 281	753 571	5394	4979
82	6 724	551 368	0554	3445	92	8 464	778 688	5917	5144
83	6 889	571 787	1104	3621	93	8 649	804 357	6437	5307
84	7 056	592 704	1652	3795	94	8 836	830 584	6954	5468
85	7 225	614 125	2195	3968	95	9 025	857 375	7468	5629
86	7 396	636 056	2736	4140	96	9 216	884 736	7980	5789
87	7 569	658 503	3274	4310	97	9 409	912 673	8489	5947
88	7 744	681 472	3808	4480	98	9 604	941 192	8995	6104
89	7 921	704 969	4340	4647	99	9 801	970 299	9499	6261
90	8 100	729 000	4868	4814	**100**	10,0000	1 000 000	10,0000	6416

RUUDUD

Lisa 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,102	1,124	1,145	1,166	1,188	2	4	6	8	10	13	15	16	17
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,322	1,346	1,369	1,392	1,416	2	5	7	9	12	14	16	18	21
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,562	1,588	1,613	1,638	1,664	2	5	8	10	12	15	18	20	22
1,3	1.690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,822	1,850	1,877	1,904	1,932	3	5	8	11	14	16	19	22	24
1,4	1,960	1,988	2,016	2,045	2,074	2,102	2,132	2,161	2,190	2,220	3	6	9	12	14	17	20	23	26
1,5	2,250	2,280	2,310	2,341	2,372	2,402	2,434	2,465	2,496	2,528	3	6	9	12	16	19	22	25	28
1,6	2,560	2,592	2,624	2,657	2,690	2,722	2,756	2,789	2,822	2,850	3	7	10	13	16	20	23	26	30
1,7	2,890	2,924	2,958	2,993	3,028	3,062	3,098	3,133	3,168	3,204	4	7	10	14	18	21	24	28	32
1,8	3,240	3,276	3,312	3,349	3,386	3,422	3,460	3,497	3,534	3,572	4	7	11	15	18	22	26	30	33
1,9	3,610	3,648	3,686	3,725	3,764	3,802	3,842	3,881	3,920	3,960	4	8	12	16	20	23	27	31	35
2,0	4,000	4,040	4,080	4,121	4,162	4,202	4,244	4,285	4,326	4,368	4	8	12	16	20	25	29	33	37
2,1	4,410	4,452	4,494	4,537	4,580	4,622	4,666	4,709	4,752	4,796	4	9	13	17	22	26	30	34	39
2,2	4,840	4,884	4,928	4,972	5,018	5,062	5,108	5,153	5,198	5,244	4	9	14	18	22	27	32	36	40
2,3	5,290	5,336	5,382	5,429	5,476	5,522	5,570	5,617	5,664	5,712	5	9	14	19	24	28	33	38	42
2,4	5,760	5,808	5,856	5,905	5,954	6,002	6,052	6,101	6,150	6,200	5	10	15	20	24	29	34	39	44
2,5	6,250	6,300	6,350	6,401	6,452	6,502	6,554	6,605	6,656	6,708	5	10	15	20	26	31	36	41	46
2,6	6,760	6,812	6,864	6,917	6,970	7,022	7,076	7,129	7,182	7,236	5	11	16	21	26	32	37	42	48
2,7	7,290	7,344	7,398	7,453	7,508	7,562	7,618	7,673	7,728	7,784	6	11	16	22	28	33	38	44	50
2,8	7,840	7,896	7,952	8,009	8,066	8,122	8,180	8,237	8,294	8,352	6	12	17	23	28	34	40	46	51
2,9	8,410	8,468	8,526	8,585	8,644	8,702	8,762	8,821	8,880	8,940	6	12	18	24	30	35	41	47	53
3,0	9,000	9,060	9,120	9,181	9,242	9,302	9,364	9,425	9,486	9,548	6	12	18	24	30	37	43	49	55

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,1	9,610	9,672	9,734	9,797	9,860	9,922	9,986				6	13	19	25	31	38	44	50	56
3,1								10,05	10,11	10,18	1	1	2	3	3	4	5	5	6
3,2	10,24	10,30	10,37	10,43	10,50	10,56	10,63	10,69	10,76	10,82	1	1	2	3	3	4	5	5	6
3,3	10,89	10,96	11,02	11,09	11,16	11,22	11,29	11,36	11,42	11,49	1	1	2	3	3	4	5	5	6
3,4	11,56	11,63	11,70	11,76	11,83	11,90	11,97	12,04	12,11	12,18	1	1	2	3	3	4	5	6	6
3,5	12,25	12,32	12,39	12,46	12,53	12,60	12,67	12,74	12,82	12,89	1	1	2	3	4	4	5	6	6
3,6	12,96	13,03	13,10	13,18	13,25	13,32	13,40	13,47	13,54	13,62	1	1	2	3	4	4	5	6	7
3,7	13,69	13,76	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36	1	2	2	3	4	5	5	6	7
3,8	14,44	14,52	14,59	14,67	14,75	14,82	14,90	14,98	15,05	15,13	1	2	2	3	4	5	5	6	7
3,9	15,21	15,29	15,37	15,44	15,52	15,60	15,68	15,76	15,84	15,92	1	2	2	3	4	5	6	6	7
4,0	16,00	16,08	16,16	16,24	16,32	16,40	16,48	16,56	16,65	16,73	1	2	2	3	4	5	6	6	7
4,1	16,81	16,89	16,97	17,06	17,14	17,22	17,31	17,39	17,47	17,56	1	2	3	3	4	5	6	7	7
4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	18,15	18,23	18,32	18,40	1	2	3	3	4	5	6	7	8
4,3	18,49	18,58	18,66	18,75	18,84	18,92	19,01	19,10	19,18	19,27	1	2	3	3	4	5	6	7	8
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	19,71	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4,5	20,25	20,34	20,43	20,52	20,61	20,70	20,79	20,88	20,98	21,07	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4,6	21,16	21,25	21,34	21,44	21,53	21,62	21,72	21,81	21,90	22,00	1	2	3	4	5	6	7	7	8
4,7	22,09	22,18	22,28	22,37	22,47	22,56	22,66	22,75	22,85	22,94	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,8	23,04	23,14	23,23	23,33	23,43	23,52	23,62	23,72	23,81	23,91	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,9	24,01	24,11	24,21	24,30	24,40	24,50	24,60	24,70	24,80	24,90	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,0	25,00	25,10	25,20	25,30	25,40	25,50	25,60	25,70	25,81	25,91	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Lisa 2 (järg)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,1	26,01	26,11	26,21	26,32	26,42	26,52	26,63	26,73	26,83	26,94	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,2	27,04	27,14	27,25	27,35	27,46	27,56	27,67	27,77	27,88	27,98	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,3	28,09	28,20	28,30	28,41	28,52	28,62	28,73	28,84	28,94	29,05	1	2	3	4	5	6	7	9	10
5,4	29,16	29,27	29,38	29,48	29,59	29,70	29,81	29,92	30,03	30,14	1	2	3	4	6	7	8	9	10
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58	30,69	30,80	30,91	31,02	31,14	31,25	1	2	3	4	6	7	8	9	10
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70	31,81	31,92	32,04	32,15	32,26	32,38	1	2	3	5	6	7	8	9	10
5,7	32,49	32,60	32,72	32,83	32,95	33,06	33,18	33,29	33,41	33,52	1	2	3	5	6	7	8	9	10
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99	34,11	34,22	34,34	34,46	34,57	34,69	1	2	4	5	6	7	8	9	11
5,9	34,81	34,93	35,05	35,16	35,28	35,40	35,52	35,64	35,76	35,88	1	2	4	5	6	7	8	10	11
6,0	36,00	36,12	36,24	36,36	36,48	36,60	36,72	36,84	36,97	37,09	1	2	4	5	6	7	8	10	11
6,1	37,21	37,33	37,45	37,58	37,70	37,82	37,95	38,07	38,19	38,32	1	2	4	5	6	7	9	10	11
6,2	38,44	38,56	38,69	38,81	38,94	39,06	39,19	39,31	39,44	39,56	1	3	4	5	6	8	9	10	11
6,3	39,69	39,82	39,94	40,07	40,20	40,32	40,45	40,58	40,70	40,83	1	3	4	5	6	8	9	10	11
6,4	46,96	41,09	41,22	41,34	41,47	41,60	41,73	41,86	41,99	42,12	1	3	4	5	6	8	9	10	12
6,5	42,25	42,38	42,51	42,64	42,77	42,90	43,03	43,16	43,30	43,43	1	3	4	5	7	8	9	10	12
6,6	43,56	43,69	43,82	43,96	44,09	44,22	44,36	44,49	44,62	44,76	1	3	4	5	7	8	9	11	12
6,7	44,89	45,02	45,16	45,29	45,43	45,56	45,70	45,83	45,97	46,10	1	3	4	5	7	8	9	11	12
6,8	46,24	46,38	46,51	46,65	46,79	46,92	47,06	47,20	47,33	47,47	1	3	4	5	7	8	10	11	12
6,9	47,61	47,75	47,89	48,02	48,16	48,30	48,44	48,58	48,72	48,86	1	3	4	6	7	8	10	11	13
7,0	49,00	49,14	49,28	49,42	49,56	49,70	49,84	49,98	50,13	50,27	1	3	4	6	7	8	10	11	13

Lisa 2 (järg)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7,1	50,41	50,55	50,69	50,84	50,98	51,12	51,27	51,41	51,55	51,70	1	3	4	6	7	9	10	11	12
7,2	51,84	51,98	52,13	52,27	52,42	52,56	52,71	52,85	53,00	53,14	1	3	4	6	7	9	10	12	13
7,3	53,29	53,44	53,58	53,73	53,88	54,02	54,17	54,32	54,46	54,61	1	3	4	6	7	9	10	12	13
7,4	54,76	54,91	55,06	55,20	55,35	55,50	55,65	55,80	55,95	56,10	1	3	4	6	7	9	10	12	13
7,5	56,25	56,40	56,55	56,70	56,85	57,00	57,15	57,30	57,46	57,61	2	3	5	6	8	9	11	12	14
7,6	57,76	57,91	58,06	58,22	58,37	58,52	58,68	58,83	58,98	59,14	2	3	5	6	8	9	11	12	14
7,7	59,29	59,44	59,60	59,75	59,91	60,06	60,22	60,37	60,53	60,68	2	3	5	6	8	9	11	12	14
7,8	60,84	61,00	61,15	61,31	61,47	61,62	61,78	61,94	62,09	62,25	2	3	5	6	8	9	11	13	14
7,9	62,41	62,57	62,73	62,88	63,04	63,20	63,36	63,52	63,68	63,84	2	3	5	6	8	10	11	13	14
8,0	64,00	64,16	64,32	64,48	64,64	64,80	64,96	65,12	65,29	65,45	2	3	5	6	8	10	11	13	14
8,1	65,61	65,77	65,93	66,10	66,26	66,42	66,59	66,75	66,91	67,08	2	3	5	7	8	10	11	13	15
8,2	67,24	67,40	67,57	67,73	67,90	68,06	68,23	68,39	68,56	68,72	2	3	5	7	8	10	12	13	15
8,3	68,89	69,06	69,22	69,39	69,56	69,72	69,89	70,06	70,22	70,39	2	3	5	7	8	10	12	13	15
8,4	70,56	70,73	70,90	71,06	71,23	71,40	71,57	71,74	71,91	72,08	2	3	5	7	8	10	12	14	15
8,5	72,25	72,42	72,59	72,76	72,93	73,10	73,27	73,44	73,62	73,79	2	3	5	7	9	10	12	14	15
8,6	73,96	74,13	74,30	74,48	74,65	74,82	75,00	75,17	75,34	75,52	2	3	5	7	9	10	12	14	16
8,7	75,69	75,86	76,04	76,21	76,39	76,56	76,74	76,91	77,09	77,26	2	4	5	7	9	11	12	14	16
8,8	77,44	77,62	77,79	77,97	78,15	78,32	78,50	78,68	78,85	79,03	2	4	5	7	9	11	12	14	16
8,9	79,21	79,39	79,57	79,74	79,92	80,10	80,28	80,46	80,64	80,82	2	4	5	7	9	11	13	14	16
9,0	81,00	81,18	81,36	81,54	81,72	81,90	82,08	82,26	82,45	82,63	2	4	5	7	9	11	13	14	16

Lisa 2 (*järg*)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
9,1	82,81	82,99	83,17	83,36	83,54	83,72	83,91	84,09	84,27	84,46	2 4 5	7 9 11	13 15 16
9,2	84,64	84,82	85,01	85,19	85,38	85,56	85,75	85,93	86,12	86,30	2 4 6	7 9 11	13 15 17
9,3	86,49	86,68	86,86	87,05	87,24	87,24	87,61	87,80	87,98	88,17	2 4 6	7 9 11	13 15 17
9,4	88,36	88,55	88,74	88,92	89,11	89,30	89,49	89,68	89,87	90,06	2 4 6	8 9 11	13 15 17
9,5	90,25	90,44	90,63	90,82	91,01	91,20	91,39	91,58	91,78	91,97	2 4 6	8 10 11	13 15 17
9,6	92,16	92,35	92,54	92,74	92,93	93,12	93,32	93,51	93,70	93,90	2 4 6	8 10 12	14 15 17
9,7	94,09	94,28	94,48	94,67	94,87	95,06	95,26	95,45	95,65	95,84	2 4 6	8 10 12	14 16 18
9,8	96,04	96,24	96,43	96,63	96,83	97,02	97,22	97,42	97,61	97,81	2 4 6	8 10 12	14 16 18
9,9	98,01	98,21	98,41	98,60	98,80	99,00	99,20	99,40	99,60	99,80	2 4 6	8 10 12	14 16 18

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
1,0	1,000	1,005	1,010	1,015	1,020	1,025	1,030	1,034	1,039	1,044	0 1 1	2 2 3	3 4 4
10,	3,162	3,178	3,194	3,209	3,225	3,240	3,256	3,271	3,286	3,302	2 3 5	6 8 9	11 12 14
1,1	1,049	1,054	1,058	1,063	1,068	1,072	1,077	1,082	1,086	1,091	0 1 1	2 2 3	3 4 4
11,	3,317	3,332	3,347	3,362	3,376	3,391	3,406	3,421	3,435	3,450	1 3 4	6 7 9	10 12 13
1,2	1,095	1,100	1,105	1,109	1,114	1,118	1,122	1,127	1,131	1,136	0 1 1	2 2 3	3 4 4
12,	3,464	3,479	3,493	3,507	3,521	3,536	3,550	3,564	3,578	3,592	1 3 4	6 7 8	10 11 13
1,3	1,140	1,145	1,149	1,153	1,158	1,162	1,166	1,170	1,175	1,179	0 1 1	2 2 3	3 3 4
13,	3,606	3,619	3,633	3,647	3,661	3,674	3,688	3,701	3,715	3,728	1 3 4	5 7 8	10 11 12
1,4	1,183	1,187	1,192	1,196	1,200	1,204	1,208	1,212	1,217	1,221	0 1 1	2 2 2	3 3 4
14,	3,742	3,755	3,768	3,782	3,795	3,808	3,821	3,834	3,847	3,860	1 3 4	5 7 8	9 11 12
1,5	1,225	1,229	1,233	31,27	1,241	1,245	1,249	1,253	1,257	1,261	0 1 1	2 2 2	3 3 4
15,	3,873	3,886	3,899	13,92	3,924	3,937	3,950	3,962	3,975	3,987	1 3 4	5 6 8	9 10 11
1,6	1,265	1,269	1,273	1,277	1,281	1,285	1,288	1,292	1,296	1,300	0 1 1	2 2 2	3 3 4
16,	4,000	4,012	4,025	4,037	4,050	4,062	4,074	4,087	4,099	4,111	1 2 4	5 6 7	9 10 11
1,7	1,304	1,308	1,311	1,315	1,319	1,323	1,327	1,330	1,334	1,338	0 1 1	2 2 2	3 3 3
17,	4,123	4,135	4,147	4,159	4,171	4,183	4,195	4,207	4,219	4,231	1 2 4	5 6 7	8 10 11
1,8	1,342	1,345	1,349	1,353	1,356	1,360	1,364	1,367	1,371	1,375	0 1 1	1 2 2	3 3 3
18,	4,243	4,254	4,266	4,278	4,290	4,301	4,313	4,324	4,336	4,347	1 2 3	5 6 7	8 9 10
1,9	1,378	1,382	1,386	1,389	1,393	1,396	1,400	1,404	1,407	1,411	0 1 1	1 2 2	3 3 3
19,	4,359	4,370	4,382	4,393	4,405	4,416	4,427	4,438	4,450	4,461	1 2 3	5 6 7	8 9 10

Lisa 3 (*järg*)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
2,0	1,414	1,418	1,421	1,425	1,428	1,432	1,435	1,439	1.442	1,446	0 1 1	1 2 2	2 3 3
20,	4,472	4,483	4,494	4,506	4,517	4,528	4,539	4,550	4,561	4,572	1 2 3	4 6 7	8 9 10
2,1	1,449	1,453	1,456	1,459	1,463	1,466	1,470	1,473	1,476	1,480	0 1 1	1 2 2	2 3 3
21,	4,583	4,593	4,604	4,615	4,626	4,637	4,648	4,658	4,669	4,680	1 2 3	4 5 6	8 9 10
2,2	1,483	1,487	1,490	1,493	1,497	1,500	1,503	1,507	1,510	1,513	0 1 1	1 2 2	2 3 3
22,	4,690	4,701	4,712	4,722	4,733	4,743	4,754	4,764	4,775	4,785	1 2 3	4 5 6	7 8 9
2,3	1,517	1,520	1,523	1,526	1,530	1,533	1,536	1,539	1,543	1,546	0 1 1	1 2 2	2 3 3
23,	4,796	4,806	4,817	4,827	4,837	4,848	4,858	4,868	4,879	4,889	1 2 3	4 5 6	7 8 9
2,4	1,549	1,552	1,556	1,559	1,562	1,565	1,568	1,572	1,575	1,578	0 1 1	1 2 2	2 3 3
24,	4,899	4,909	4,919	4,930	4,940	4,950	4,960	4,970	4,980	4,990	1 2 3	4 5 6	7 8 9
2,5	1,581	1,584	1,587	1,591	1,594	1,597	1.600	1,603	1,606	1,609	0 1 1	1 2 2	2 3 3
25,	5,000	5,010	5,020	5,030	5,040	5,050	5,060	5,070	5,079	5,089	1 2 3	4 5 6	7 8 9
2,6	1,612	1,616	1,619	1,622	1,625	1,628	1,631	1,634	1,637	1,640	0 1 1	1 2 2	2 2 3
26,	5,099	5,109	5,119	5,128	5,138	5,148	5,158	5,167	5,177	5,187	1 2 3	4 5 6	7 8 9
2,7	1,643	1,646	1,649	1,652	1,655	1,658	1,661	1,664	1,667	1,670	0 1 1	1 2 2	2 2 3
27,	5,196	5,206	5,215	5,225	5,235	5,244	5,254	5,263	5,273	5,282	1 2 3	4 5 6	7 8 9
2,8	1,673	1,676	1,679	1,682	1,685	1,688	1,691	1,694	1,697	1,700	0 1 1	1 1 2	2 2 3
28,	5,292	5,301	5,310	5,320	5,329	5,339	5,348	5,357	5,367	5,376	1 2 3	4 5 6	7 7 8
2,9	1,703	1,706	1,709	1,712	1,715	1,718	1,720	1,723	1,726	1,729	0 1 1	1 1 2	2 2 3
29,	5,385	5,394	5,404	5,413	5,422	5,431	5,441	5,450	5,459	5,468	1 2 3	4 5 5	6 7 8

Lisa 3 (järg)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
3,0	1,732	1,735	1,738	1,741	1,744	1,746	1,749	1,752	1,755	1,758	0 1 1	1 1 2	2 2 3
30,	5,477	5,486	5,495	5,505	5,514	5,523	5,532	5,541	5,550	5,559	1 2 3	4 4 5	6 7 8
3,1	1,761	1,764	1,766	1,769	1,772	1,775	1,778	1,780	1,783	1,786	0 1 1	1 1 2	2 2 3
31,	5,568	5,577	5,586	5,595	5,604	5,612	5,621	5,630	5,639	5,648	1 2 3	3 4 5	6 7 8
3,2	1,789	1,792	1,794	1,797	1,800	1,803	1,806	1,808	1,811	1,814	0 1 1	1 1 2	2 2 2
32,	5,657	5,666	5,675	5,683	5,692	5,701	5,710	5,718	5,727	5,736	1 2 3	3 4 5	6 7 8
3,3	1,817	1,819	1,822	1,825	1,828	1,830	1,833	1,836	1,838	1,841	0 1 1	1 1 2	2 2 2
33,	5,745	5,753	5,762	5,771	5,779	5,788	5,797	5,805	5,814	5,822	1 2 3	3 4 5	6 7 8
3,4	1,844	1,847	1,849	1,852	1,855	1,857	1,860	1,863	1,865	1,868	0 1 1	1 1 2	2 2 2
34,	5,831	5,840	5,848	5,857	5,865	5,874	5,882	5,891	5,899	5,908	1 2 3	3 4 5	6 7 8
3,5	1,871	1,873	1,876	1,879	1,881	1,884	1,887	1,889	1,892	1,895	0 1 1	1 1 2	2 2 2
35,	5,916	5,925	5,933	5,941	5,950	5,958	5,967	5,975	5,983	5,992	1 2 2	3 4 5	6 7 8
3,6	1,897	1,900	1,903	1,905	1,908	1,910	1,913	1,916	1,918	1,921	0 1 1	1 1 2	2 2 2
36,	6,000	6,008	6,017	6,025	6,033	6,042	6,050	6,058	6,066	6,075	1 2 2	3 4 5	6 7 7
3,7	1,924	1,926	1,929	1,931	1,934	1,936	1,939	1,942	1,944	1,947	0 1 1	1 1 2	2 2 2
37,	6,083	6,091	6,099	6,107	6,116	6,124	6,132	6,140	6,148	6,156	1 2 2	3 4 5	6 7 7
3,8	1,649	1,952	1,954	1,957	1,960	1,962	1,965	1,967	1,970	1,972	0 1 1	1 1 2	2 2 2
38,	6,164	6,173	6,181	6,189	6,197	6,205	6,213	6,221	6,229	6,237	1 2 2	3 4 5	6 6 7
3,9	1,975	1,977	1,980	1,982	1,985	1,987	1,990	1,992	1,995	1,997	0 1 1	1 1 2	2 2 2
39,	6,245	6,253	6,261	6,269	6,277	6,285	6,293	6,301	6,309	6,317	1 2 2	3 4 5	6 6 7

Lisa 3 (*järg*)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
4,0	2,000	2,002	2,005	2,007	2,010	2,012	2,015	2,017	2,020	2,022	0 0 1	1 1 1	2 2 2
40,	6,325	6,332	6,340	6,348	6,356	6,364	6,372	6,380	6,387	6,395	1 2 2	3 4 5	6 6 7
4,1	2,025	2,027	2,030	2,032	2,035	2,037	2,040	2,042	2,045	2,047	0 0 1	1 1 1	2 2 2
41,	6,403	6,411	6,419	6,427	6,434	6,442	6,450	6,458	6,465	6,473	1 2 2	3 4 5	5 6 7
4,2	2,049	2,052	2,054	2,057	2,059	2,062	2,064	2,066	2,069	2,071	0 0 1	1 1 1	2 2 2
42,	6,481	6,488	6,496	6,504	6,512	6,519	6,527	6,535	6,542	6,550	1 2 2	3 4 5	5 6 7
4,3	2,074	2,076	2,078	2,081	2,083	2,086	2,088	2,090	2,093	2,095	0 0 1	1 1 1	2 2 2
43,	6,557	6,565	6,573	6,580	6,588	6,595	6,603	6,611	6,618	6,626	1 2 2	3 4 5	5 6 7
4,4	2,098	2,100	2,102	2,105	2,107	2,110	2,112	2,114	2,117	2,119	0 0 1	1 1 1	2 2 2
44,	6,633	6,641	6,648	6,656	6,663	6,671	6,678	6,686	6,693	6,701	1 1 2	3 4 4	5 6 7
4,5	2,121	2,124	2,126	2,128	2,131	2,133	2,135	2,138	2,140	2,142	0 0 1	1 1 1	2 2 2
45,	6,708	6,716	6,723	6,731	6,738	6,745	6,753	6,760	6,768	6,775	1 1 2	3 4 4	5 6 7
4,6	2,145	2,147	2,149	2,152	2,154	2,156	2,159	2,161	2,163	2,166	0 0 1	1 1 1	2 2 2
46,	6,782	6,790	6,797	6,804	6,812	6,819	6,826	6,834	6,841	6,848	1 1 2	3 4 4	5 6 7
4,7	2,168	2,170	2,173	2,175	2,177	2,179	2,182	2,184	2,186	2,189	0 0 1	1 1 1	2 2 2
47,	6,856	6,863	6,870	6,877	6,885	6,892	6,899	6,907	6,914	6,921	1 1 2	3 4 4	5 6 7
4,8	2,191	2,193	2,195	2,198	2,200	2,202	2,205	2,207	2,209	2,211	0 0 1	1 1 1	2 2 2
48,	6,928	6,935	6,943	6,950	6,957	6,964	6,971	6,979	6,986	6,993	1 1 2	3 4 4	5 6 6
4,9	2,214	2,216	2,218	2,220	2,223	2,225	2,227	2,229	2,232	2,234	0 0 1	1 1 1	2 2 2
49,	7,000	7,007	7,014	7,121	7,029	7,036	7,043	7,050	7,057	7,064	1 1 2	3 4 4	5 6 6

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
5,0	2,236	2,238	2,241	2,243	2,245	2,247	2,249	2,252	2,254	2,256	0 0 1	1 1 1	2 2 2
50,	7,071	7,078	7,085	7,092	7,099	7,106	7,113	7,120	7,127	7,134	1 1 2	3 4 4	5 6 6
5,1	2,258	2,261	2,263	2,265	2,267	2,269	2,272	2,274	2,276	2,278	0 0 1	1 1 1	2 2 2
51,	7,141	7,148	7,155	7,162	7,169	7,176	7,183	7,190	7,197	7,204	1 1 2	3 3 4	5 6 6
5,2	2,280	2,283	2,285	2,287	2,289	2,291	2,293	2,296	2,298	2,300	0 0 1	1 1 1	2 2 2
52,	7,211	7,218	7,225	7,232	7,239	7,246	7,253	7,259	7,266	7,273	1 1 2	3 3 4	5 6 6
5,3	2,302	2,304	2,307	2,309	2,311	2,313	2,315	2,317	2,319	2,322	0 0 1	1 1 1	2 2 2
53,	7,280	7,287	7,294	7,301	7,308	7,314	7,321	7,328	7,335	7,342	1 1 2	3 3 4	5 5 6
5,4	2,324	2,326	2,328	2,330	2,332	2,335	2,337	2,339	2,341	2,343	0 0 1	1 1 1	1 2 2
54,	7,348	7,355	7,362	7,369	7,376	7,382	7,389	7,396	7,403	7,409	1 1 2	3 3 4	5 5 6
5,5	2,345	2,347	2,349	2,352	2,354	2,356	2,358	2,360	2,362	2,364	0 0 1	1 1 1	1 2 2
55,	7,416	7,423	7,430	7,436	7,443	7,450	7,457	7,463	7,470	7,477	1 1 2	3 3 4	5 5 6
5,6	2,366	2,369	2,371	2,373	2,375	2,377	2,379	2,381	2,383	2,385	0 0 1	1 1 1	1 2 2
56,	7,483	7,490	7,497	7,503	7,510	7,517	7,523	7,530	7,537	7,543	1 1 2	3 3 4	5 5 6
5,7	2,387	2,390	2,392	2,394	2,396	2,398	2,400	2,402	2,404	2,406	0 0 1	1 1 1	1 2 2
57,	7,550	7,556	7,563	7,570	7,576	7,583	7,589	7,596	7,603	7,609	1 1 2	3 3 4	5 5 6
5,8	2,408	2,410	2,412	2,415	2,417	2,419	2,421	2,423	2,425	2,427	0 0 1	1 1 1	1 2 2
58,	7,616	7,622	7,629	7,635	7,642	7,649	7,655	7,662	7,668	7,675	1 1 2	3 3 4	5 5 6
5,9	2,429	2,431	2,433	2,435	2,437	2,439	2,441	2,443	2,445	2,447	0 0 1	1 1 1	1 2 2
59,	7,681	7,688	7,694	7,701	7,707	7,714	7,720	7,727	7,733	7,740	1 1 2	3 3 4	5 5 6

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
6,0	2,449	2,452	2,454	2,456	2,458	2,460	2,462	2,464	2,466	2,468	0 0 1	1 1 1	1 2 2
60,	7,746	7,752	7,759	7,765	7,772	7,778	7,785	7,791	7,797	7,804	1 1 2	3 3 4	4 5 6
6,1	2,470	2,472	2,474	2,476	2,478	2,480	2,482	2,484	2,486	2,488	0 0 1	1 1 1	1 2 2
61,	7,810	7,817	7,823	7,829	7,836	7,842	7,849	7,855	7'861	7,868	1 1 2	3 3 4	4 5 6
6,2	2,490	2,492	2,494	2,496	2,498	2,500	2,502	2,504	2,506	2,508	0 0 1	1 1 1	1 2 2
62,	7,874	7,880	7,887	7,893	7,899	7,906	7,912	7,918	7,925	7,931	1 1 2	3 3 4	4 5 6
6,3	2,510	2,512	2,514	2,516	2,518	2,520	2,522	2,524	2,526	2,528	0 0 1	1 1 1	1 2 2
63,	7,937	7,944	7,950	7,956	7,962	7,969	7,975	7,981	7,987	7,994	1 1 2	3 3 4	4 5 6
6,4	2,530	2,532	2,534	2,536	2,538	2,540	2,542	2,544	2,546	2,548	0 0 1	1 1 1	1 2 2
64,	8,000	8,006	8,012	8,019	8,025	8,031	8,037	8,044	8,050	8,056	1 1 2	2 3 4	4 5 6
6,5	2,550	2,551	2,553	2,555	2,557	2,559	2,561	2,563	2,565	2,567	0 0 1	1 1 1	1 2 2
65,	8,062	8,068	8,075	8,081	8,087	8,093	8,099	8,106	8,112	8,118	1 1 2	2 3 4	4 5 6
6,6	2,569	2,571	2,573	2,575	2,577	2,579	2,581	2,583	2,585	2,587	0 0 1	1 1 1	1 2 2
66,	8,124	8,130	7,136	8,142	8,149	8,155	8,161	8,167	8,173	8,179	1 1 2	2 3 4	4 5 5
6,7	2,588	2,590	2,592	2,594	2,596	2,598	2,600	2,602	2,604	2,606	0 0 1	1 1 1	1 2 2
67,	8,185	8,191	8,198	8,204	8,210	8,216	8,222	8,228	8,234	8,240	1 1 2	2 3 4	4 5 5
6,8	2,608	2,610	2,612	2,613	2,615	2,617	2,619	2,621	2,623	2,625	0 0 1	1 1 1	1 2 2
68,	8,246	8,252	8,258	8,264	8,270	8,276	8,283	8,289	8,295	8,301	1 1 2	2 3 4	4 5 5
6,9	2,627	2,629	2,631	2,632	2,634	2,636	2,638	2,640	2,642	2,644	0 0 1	1 1 1	1 2 2
69,	8,307	8,313	8,319	8,325	8,331	8,337	8,343	8,349	8,355	8,361	1 1 2	2 3 4	4 5 5

Lisa 3 (järg)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
7,0	2,646	2,648	2,650	2,651	2,653	2,655	2,657	2,659	2,661	2,663	0 0 1	1 1 1	1 2 2
70,	8,367	8,373	8,379	8,385	8,390	8,396	8,402	8,408	8,414	8,420	1 1 2	2 3 4	4 5 5
7,1	2,665	2,666	2,668	2,670	2,672	2,674	2,676	2,678	2,680	2,681	0 0 1	1 1 1	1 1 2
71,	8,426	8,432	8,438	8,444	8,450	8,456	8,462	8,468	8,473	8,479	1 1 2	2 3 4	4 5 5
7,2	2,683	2,685	2,687	2,689	2,691	2,693	2,694	2,696	2,698	2,700	0 0 1	1 1 1	1 1 2
72,	8,485	8,491	8,497	8,503	8,509	8,515	8,521	8,526	8,532	8,538	1 1 2	2 3 3	4 5 5
7,3	2,702	2,704	2,706	2,707	2,709	2,711	2,713	2,715	2,717	2,718	0 0 1	1 1 1	1 1 2
73,	8,544	8,550	8,556	8,562	8,567	8,573	8,579	8,585	8,591	8,597	1 1 2	2 3 3	4 5 5
7,4	2,720	2,722	2,724	2,726	2,728	2,729	2,731	2,733	2,735	2,737	0 0 1	1 1 1	1 1 2
74,	8,602	8,608	8,614	8,620	8,626	8,631	8,637	8,643	8,649	8,654	1 1 2	2 3 3	4 5 5
7,5	2,739	2,740	2,742	2,744	2,746	2,748	2,750	2,751	2,753	2,755	0 0 1	1 1 1	1 1 2
75,	8,660	8,666	8,672	8,678	8,683	8,689	8,695	8,701	8,706	8,712	1 1 2	2 3 3	4 5 5
7,6	2,757	2,759	2,760	2,762	2,764	2,766	2,768	2,769	2,771	2,773	0 0 1	1 1 1	1 1 2
76,	8,718	8,724	8,729	8,735	8,741	8,746	8,752	8,758	8,764	8,769	1 1 2	2 3 3	4 5 5
7,7	2,775	2,777	2,778	2,780	2,782	2,784	2,786	2,787	2,789	2,791	0 0 1	1 1 1	1 1 2
77,	8,775	8,781	8,786	8,792	8,798	8,803	8,809	8,815	8,820	8,826	1 1 2	2 3 3	4 4 5
7,8	2,793	2,795	2,796	2,798	2,800	2,802	2,804	2,805	2,807	2,809	0 0 1	1 1 1	1 1 2
78,	8,832	8,837	8,843	8,849	8,854	6,860	8,866	8,871	8,877	8,883	1 1 2	2 3 3	4 4 5
7,9	2,811	2,812	2,814	2,816	2,818	2,820	2,821	2,823	2,825	2,827	0 0 1	1 1 1	1 1 2
79,	8,888	8,894	8,899	8,905	8,911	8,916	8,922	8,927	8,933	8,939	1 1 2	2 3 3	4 4 5

Lisa 3 (*järg*)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
8,0	2,828	2,830	2,832	2,834	2,835	2,837	2,839	2,841	2,843	2,844	0 0 1	1 1 1	1 1 2
80,	8,944	8,950	8,955	8,961	8,967	8,972	8,978	8,983	8,989	8,994	1 1 2	2 3 3	4 4 5
8,1	2,846	2,848	2,850	2,851	2,853	2,855	2,857	2,858	2,860	2,862	0 0 1	1 1 1	1 1 2
81,	9,000	9,006	9,011	9,017	9,022	9,028	9,033	9,039	9,044	9,050	1 1 2	2 3 3	4 4 5
8,2	2,864	2,865	2,867	2,869	2,871	2,872	2,874	2,876	2,877	2,879	0 0 1	1 1 1	1 1 2
82,	9,055	9,061	9,066	9,072	9,077	9,083	9,088	9,094	9,099	9,105	1 1 2	2 3 3	4 4 5
8,3	2,881	2,883	2,884	2,886	2,888	2,890	2,891	2,893	2,895	2,897	0 0 1	1 1 1	1 1 2
83,	9,110	9,116	9,121	9,127	9,132	9,138	9,143	9,149	9,154	9,160	1 1 2	2 3 3	4 4 5
8,4	2,898	2,900	2,902	2,903	2,905	2,907	2,909	2,910	2,912	2,914	0 0 1	1 1 1	1 1 2
84,	9,165	9,171	9,176	9,182	9,187	9,192	9,198	9,203	9,209	9,214	1 1 2	2 3 3	4 4 5
8,5	2,915	2,917	2,919	2,921	2,922	2,924	2,926	2,927	2,929	2,931	0 0 1	1 1 1	1 1 2
85,	9,220	9,225	9,230	9,236	9,241	9,247	9,252	9,257	9,263	9,268	1 1 2	2 3 3	4 4 5
8,6	2,933	2,934	2,936	2,938	2,939	2,641	2,943	2,944	2,946	2,948	0 0 1	1 1 1	1 1 2
86,	9,274	9,279	9,284	9,290	9,295	9,301	9,306	9,311	9,317	9,322	1 1 2	2 3 3	4 4 5
8,7	2,950	2,951	2,953	2,955	2,956	2,958	2,960	2,961	2,963	2,965	0 0 1	1 1 1	1 1 2
87,	9,327	9,333	9,338	9,343	9,349	9,354	9,359	9,365	9,370	9,375	1 1 2	2 3 3	4 4 5
8,8	2,966	2,968	2,970	2,972	2,973	2,975	2,977	2,978	2,980	2,982	0 0 1	1 1 1	1 1 5
88,	9,381	9,386	9,391	9,397	9,402	9,407	9,413	9,418	9,423	9,429	1 1 2	2 3 3	4 4 2
8,9	2,983	2,985	2,987	2,988	2,990	2,992	2,993	2,995	2,997	2,998	0 0 1	1 1 1	1 1 2
89,	2,934	9,439	9,445	9,450	9,455	9,460	9,466	9,471	9,476	9,482	1 1 2	2 3 3	4 4 5

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
9,0	3,000	3,002	3,003	3,005	3,007	3,008	3,010	3,012	3,013	3,015	0 0 0	1 1 1	1 1 1
90,	9,487	9,492	9,497	9,503	9,508	9,513	9,518	9,524	9,529	9,534	1 1 2	2 3 3	4 4 5
9,1	3,017	3,018	3,020	3,022	3,023	3,025	3,027	3,028	3,030	3,032	0 0 0	1 1 1	1 1 1
91,	9,539	9,545	9,550	9,555	9,560	9,566	9,571	9,576	9,581	9,586	1 1 2	2 3 3	4 4 5
9,2	3,033	3,035	3,036	3,038	3,040	3,041	3,043	3,045	3,046	3,048	0 0 0	1 1 1	1 1 1
92,	9,592	9,597	9,602	9,607	9,612	9,618	9,623	9,628	9,633	9,638	1 1 2	2 3 3	4 4 5
9,3	3,050	3,051	3,053	3 055	3,056	3,058	3,059	3,061	3,063	3,064	0 0 0	1 1 1	1 1 1
93,	9,644	9,649	9,654	9,659	9,664	9,670	9,675	9,680	9,685	9,690	1 1 2	2 3 3	4 4 5
9,4	3,066	3,068	3,069	3,071	3,072	3,074	3,076	3,077	3,079	3,081	0 0 0	1 1 1	1 1 1
94,	9,695	9,701	9,706	9,711	9,716	9,721	9,726	9,731	9,737	9,742	1 1 2	2 3 3	4 4 5
9,5	3,082	3,084	3,085	3,087	3,089	3,090	3,092	3,094	3,095	3,097	0 0 0	1 1 1	1 1 1
95,	9,747	9,752	9,757	9,762	9,767	9,772	9,778	9,783	9,788	9,793	1 1 2	2 3 3	4 4 5
9,6	3,098	3,100	3,102	3,103	3,105	3,106	3,108	3,110	3,111	3,113	0 0 0	1 1 1	1 1 1
96,	9,798	9,803	9,608	9,813	9,818	9,823	9,829	9,834	9,839	9,844	1 1 2	2 3 3	4 4 5
9,7	3,114	3,116	3,118	3,119	3,121	3,122	3,124	3,126	3,127	3,129	0 0 0	1 1 1	1 1 1
97,	9,849	9,854	9,859	9,864	9,869	9,874	9,879	9,884	9,889	9,894	1 1 2	2 3 3	4 4 5
9,8	3,130	3,132	3,134	3,135	3,137	3,138	3,140	3,142	3,143	3,145	0 0 0	1 1 1	1 1 1
98,	9,899	9,905	9,910	9,915	9,920	9,925	9,930	9,935	9,940	9,945	0 1 1	2 2 3	3 4 4
9,9	3,146	3,148	3,150	3,151	3,153	3,154	3,156	3,158	3,159	3,161	0 0 0	1 1 1	1 1 1
99,	9,950	9,955	9,960	9,965	9,970	9,975	9,980	9,985	9,990	9,995	0 1 1	2 2 3	3 4 4

LOGARITMID

Lisa 4

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374									
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	27	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8

Lisa 4 (järg)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1 2 2	3 4 5	6 7 7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1 2 2	3 4 5	6 6 7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1 2 2	3 4 5	6 6 7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1 2 2	3 4 5	5 6 7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1 2 2	3 4 5	5 6 7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1 2 2	3 4 5	5 6 7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1 1 2	3 4 4	5 6 7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1 1 2	3 4 4	5 6 7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1 1 2	3 4 4	5 6 6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1 1 2	3 4 4	5 6 6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1 1 2	3 3 4	5 6 6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1 1 2	3 3 4	5 5 6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1 1 2	3 3 4	5 5 6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1 1 2	3 3 4	5 5 6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1 1 2	3 3 4	5 5 6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1 1 2	3 3 4	4 5 6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1 1 2	2 3 4	4 5 6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1 1 2	2 3 4	4 5 6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1 1 2	2 3 4	4 5 5
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1 1 2	2 3 4	4 5 5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1 1 2	2 3 4	4 5 5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1 1 2		

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1 1 2	2 3 4	4 5 5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1 1 2	2 3 3	4 5 5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1 1 2	2 3 3	4 5 5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1 1 2	2 3 3	4 4 5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1 1 2	2 3 3	4 4 5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1 1 2	2 3 3	4 4 5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1 1 2	2 3 3	4 4 5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1 1 2	2 3 3	4 4 5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1 1 2	2 3 3	4 4 5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1 1 2	2 3 3	4 4 5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1 1 2	2 3 3	4 4 5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1 1 2	2 3 3	4 4 5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1 1 1	2 3 3	4 4 5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0 1 1	2 2 3	3 4 4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0 1 1	2 2 3	3 4 4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0 1 1	2 2 3	3 4 4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0 1 1	2 2 3	3 4 4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0 1 1	2 2 3	3 4 4
92	9638	9643	9047	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0 1 1	2 2 3	3 4 4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0 1 1	2 2 3	3 4 4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0 1 1	2 2 3	3 4 4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0 1 1	2 2 3	3 4 4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0 1 1	2 2 3	3 4 4

Lisa 4 (järg)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0 1 1	2 2 3	3 4 4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0 1 1	2 2 3	3 4 4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0 1 1	2 2 3	3 3 4

	0	5
100	000 000	002 166
101	004 321	006 466
102	008 600	010 724
103	012 837	014 940
104	017 033	019 116
105	021 189	023 252
106	025 306	027 350
107	029 384	031 408
108	033 424	035 430
109	037 426	039 414
110	041 393	043 362

	n	$\log n$	$\log \frac{1}{n}$
π	3,1416	0,4971	$\bar{1}$,5029
2π	6,2832	0 7982	$\bar{1}$,2018
4π	12,5664	1,0992	$\bar{2}$,9008
$\pi : 2$	1,5708	0,1961	$\bar{1}$,8039
$\pi : 4$	0,7854	0,1049	$\bar{1}$,8951
$4\pi : 3$	4,1888	0,6221	$\bar{1}$,3779
$\sqrt{\pi}$	1,7725	0,2486	$\bar{1}$,7514
$\sqrt[3]{4\pi : 3}$	1,6120	0,2074	$\bar{1}$,7926
π^2	9,8696	0,9943	$\bar{1}$,0057
$\varrho = 180 : \pi$	57,2958	1,7581	$\bar{2}$,2419

KESKMISE VALIK MÕNEDE PRAKTIKAS TIHTI ESINEVATE ÜLESANNETE LAHENDAMISEL[1]

Otsitav suurus	Seosvalem	Kaaluks kasutatav suurus	Keskmise liik
Keskmine kiirus	$\text{kiirus} = \frac{\text{tee}}{\text{aeg}}$	$\frac{\text{tee pikkus}}{\text{sõidu kestus}}$	$\frac{\text{harm.}}{\text{aritm.}}$
Keskmine sõiduaeg	$\text{aeg} = \frac{\text{tee}}{\text{kiirus}}$	$\frac{\text{tee pikkus}}{\text{kiirus}}$	$\frac{\text{harm.}}{\text{aritm.}}$
Keskmine hind	$\text{hind} = \frac{\text{maksumus}}{\text{kogus}}$	$\frac{\text{maksumus}}{\text{kogus}}$	$\frac{\text{harm.}}{\text{aritm.}}$
Keskmine kogus	$\text{kogus} = \frac{\text{maksumus}}{\text{hind}}$	$\frac{\text{maksumus}}{\text{hind}}$	$\frac{\text{harm.}}{\text{aritm.}}$
Keskmine tööviljakus	$\text{tööviljakus} = \frac{\text{toodang}}{\text{tööliste arv}}$	$\frac{\text{toodang}}{\text{tööliste arv}}$	$\frac{\text{harm.}}{\text{aritm.}}$
Keskmine tööliste arv	$\text{tööliste arv} = \frac{\text{toodang}}{\text{töövilj.}}$	$\frac{\text{toodang}}{\text{tööviljakus}}$	$\frac{\text{harm.}}{\text{aritm.}}$

Lisa 5 (*järg*)

Otsitav suurus	Seosevalem	Kaaluks kasutatav suurus	Keskmine liik
Keskmine materjali kulunorm	materjali kulunorm $= \frac{\text{materjali kogus}}{\text{toodete arv}}$	$\frac{\text{materjali kogus}}{\text{toodete arv}}$	$\frac{\text{harm.}}{\text{aritm.}}$
Keskmine plaani täitmise näitaja	plaani täitmise näitaja $= \frac{\text{aruanne}}{\text{plaan}}$	$\frac{\text{aruanne}}{\text{plaan}}$	$\frac{\text{harm.}}{\text{aritm.}}$
Toote keskmine omahind	omahind $= \frac{\text{tootmiskulude summa}}{\text{toodete arv}}$	$\frac{\text{tootmiskulude summa}}{\text{toodete arv}}$	harm. aritm.
Keskmine saagikus	saagikus $= \frac{\text{saak}}{\text{külvipind}}$	$\frac{\text{saak}}{\text{külvipind}}$	$\frac{\text{harm.}}{\text{aritm.}}$

[1] U. Mereste, Statistika üldteooria. Tallinn, «Valgus», 1975, lk. 174.

Lisa 6

NORMAALJAOTUSKÕVERA ORDINAATIDE VÄÄRTUSED

(Funktsiooni $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}$ väärtused).

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29430	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09829	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08938	08780	08628	08478	08329	08183	08038

Lisa 6 *(järg)*

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	01083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457
3,0	00443	00430	00417	00405	00393	00381	00370	00358	00348	00337
3,1	00327	00317	00307	00298	00288	00279	00271	00262	00254	00246
3,2	00238	00231	00224	00216	00210	00203	00196	00190	00184	00178
3,3	00172	00167	00161	00156	00151	00146	00141	00136	00132	00127
3,4	00123	00119	00115	00111	00107	00104	00100	00097	00094	00090
3,5	00087	00084	00081	00079	00076	00073	00071	00068	00066	00063
3,6	00061	00059	00057	00055	00053	00051	00049	00047	00046	00044
3,7	00042	00041	00039	00038	00037	00035	00034	00033	00031	00030
3,8	00029	00028	00027	00026	00025	00024	00023	00022	00021	00021
3,9	00020	00019	00018	00018	00017	00016	00016	00015	00014	00014
4,0	00013	00019	00006	00004	00002	00002	00001	00001	00000	00000

Lisa 7

JUHUSLIKE ARVUDE TABEL

96 238	11 860	83 699	38 631	90 045	69 696	48 572	05 917	51 905	10 052
03 550	59 144	59 468	37 984	77 892	89 766	86 489	46 619	50 263	91 136
22 188	81 205	99 699	84 260	19 693	36 701	43 233	62 719	53 117	71 153
63 579	61 425	14 043	49 095	84 746	22 018	19 014	76 781	61 086	90 216
55 006	17 765	15 013	77 707	54 317	48 862	53 823	52 905	70 754	68 212
81 972	45 644	12 600	01 951	72 166	52 682	97 598	11 955	73 018	23 528
06 344	50 136	33 122	31 794	86 423	58 037	36 065	32 190	31 367	96 007
92 363	99 784	94 169	03 652	80 824	33 407	40 837	97 749	18 364	72 666
96 083	16 943	89 916	55 159	62 184	86 208	09 764	20 244	88 388	98 675
92 993	10 747	08 985	44 999	36 785	65 035	65 933	77 378	92 339	96 454
95 083	70 292	50 394	61 044	65 591	09 774	16 216	63 561	59 751	78 771
77 308	60 721	96 057	86 031	83 148	34 970	30 892	53 489	44 999	18 021
11 913	49 624	28 510	27 311	61 586	28 576	43 092	69 971	44 220	80 410
70 648	47 484	05 095	92 335	55 299	27 161	64 486	71 307	85 883	69 610
92 771	99 203	37 786	81 142	44 271	36 433	31 726	74 379	89 348	76 886
78 816	20 975	13 043	55 921	82 774	62 745	48 338	88 348	61 211	88 074
79 934	35 392	56 097	87 613	94 627	63 622	08 110	16 611	88 599	02 890
64 698	83 376	87 524	36 897	17 215	74 339	69 856	43 622	22 567	11 518
44 212	12 995	03 581	37 618	94 851	63 020	65 348	55 857	91 742	79 508
82 292	00 204	00 579	70 630	37 136	50 922	83 387	15 014	51 838	81 760
08 692	87 237	87 879	01 629	72 184	33 853	95 144	67 943	19 345	03 469
67 927	76 855	50 702	78 555	97 442	78 809	40 575	79 714	06 201	34 576
62 167	94 213	52 971	85 974	68 067	78 814	40 103	70 759	92 129	46 716
45 828	45 441	74 220	84 157	23 241	49 332	23 646	09 390	13 032	51 569
01 164	35 307	26 526	80 335	58 090	85 871	07 205	31 749	40 571	51 755

29 283	31 581	04 359	45 538	41 435	61 103	32 428	94 042	39 971	63 678
19 868	49 978	81 699	84 904	50 163	22 625	07 845	71 308	00 859	87 984
14 294	93 587	55 960	23 149	07 370	65 065	06 580	46 285	07 884	83 928
77 410	52 195	29 459	23 032	83 242	89 938	40 510	27 252	55 565	64 714
36 580	06 921	35 675	81 645	60 479	71 035	99 380	59 759	42 161	93 440
07 780	18 093	31 258	78 156	07 871	20 369	53 947	08 534	39 433	57 216
07 548	08 454	36 674	46 255	80 541	42 903	37 366	21 164	97 516	66 181
22 023	60 448	69 344	44 260	90 570	01 632	21 002	24 413	04 671	05 665
20 827	37 210	57 797	34 660	32 510	71 558	78 228	42 304	77 197	79 168
47 802	79 270	48 805	59 480	88 092	11 441	96 016	76 091	51 823	94 442
76 730	86 591	18 978	25 479	77 684	88 439	35 112	26 052	57 112	91 653
26 439	02 903	20 935	76 297	15 290	84 688	74 002	09 467	41 111	19 194
32 927	83 426	07 848	59 327	44 422	53 372	27 823	25 417	27 150	21 750
51 484	05 286	77 103	47 284	05 578	88 774	15 293	50 740	07 932	87 633
45 142	96 004	92 834	26 886	70 002	96 643	36 008	02 239	93 563	66 429
12 760	96 106	89 348	76 127	17 058	36 181	74 001	43 869	28 377	80 923
15 564	38 648	02 147	02 894	97 787	35 234	44 302	41 672	12 408	90 168
71 051	34 941	55 384	70 709	11 646	30 269	60 154	28 276	48 153	23 122
42 742	09 817	82 579	19 505	26 344	94 116	86 230	49 139	32 644	36 545
59 474	97 752	77 124	79 579	65 448	87 700	54 002	81 411	57 988	57 437
12 581	18 211	61 713	73 962	87 212	55 624	85 675	33 961	63 272	17 587
00 278	75 089	20 673	37 438	92 361	47 941	62 056	94 104	45 502	79 159
59 317	31 861	62 559	30 925	23 055	70 922	47 195	29 827	68 065	95 409
59 220	42 448	70 881	33 687	53 575	54 599	69 525	76 424	98 778	10 459
90 670	32 157	15 877	87 120	13 857	23 979	38 922	62 421	03 043	19 602

TÕENÄOSUSINTEGRAALI VÄÄRTUSED

/	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0000	0080	0160	0239	0319	0399	0478	0558	0638	0717
0,1	0797	0876	0955	1034	1113	1192	1271	1350	1428	1507
0,2	1585	1663	1741	1819	1897	1974	2051	2128	2205	2282
0,3	2358	2434	2510	2586	2661	2737	2812	2886	2961	3035
0,4	3108	3182	3255	3328	3401	3473	3545	3616	3688	3759
0,5	3829	3899	3969	4039	4108	4177	4245	4313	4381	4448
0,6	4515	4581	4647	4713	4778	4843	4907	4971	5035	5098
0,7	5161	5223	5285	5346	5407	5467	5527	5587	5646	5705
0,8	5763	5821	5878	5935	5991	6047	6102	6157	6211	6265
0,9	6319	6372	6424	6476	6528	6579	6629	6680	6729	6778
1,0	6827	6875	6923	6970	7017	7063	7109	7154	7199	7243
1,1	7287	7330	7373	7415	7457	7499	7540	7580	7620	7660
1,2	7699	7737	7775	7813	7850	7887	7923	7959	7995	8029
1,3	8064	8098	8132	8165	8198	8230	8262	8293	8324	8355
1,4	8385	8415	8444	8473	8501	8529	8557	8584	8611	8638
1,5	8664	8690	8715	8740	8764	8789	8812	8836	8859	8882
1,6	8904	8926	8948	8969	8990	9011	9031	9051	9070	9090
1,7	9109	9127	9146	9164	9181	9199	9216	9233	9249	9265
1,8	9281	9297	9312	9327	9342	9357	9371	9385	9399	9412
1,9	9426	9439	9451	9464	9476	9488	9500	9512	9523	9534
2,0	9545	9556	9566	9576	9586	9596	9606	9616	9625	9634
2,1	9643	9651	9660	9668	9676	9684	9692	9700	9707	9715
2,2	9722	9729	9736	9743	9749	9756	9762	9768	9774	9780
2,3	9786	9791	9797	9802	9807	9812	9817	9822	9827	9832
2,4	9836	9840	9845	9849	9853	9857	9861	9865	9869	9872
2,5	9876	9879	9883	9886	9889	9892	9895	9898	9901	9904
2,6	9907	9909	9912	9915	9917	9920	9922	9924	9926	9929
2,7	9931	9933	9935	9937	9939	9940	9942	9944	9946	9947
2,8	9949	9950	9952	9953	9955	9956	9958	9959	9960	9961
2,9	9963	9964	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972
3,0	9973	9981	9986	9990	9993	9995	9997	9998	9999	9999

Lisa 9

χ^2-KRITEERIUMI VÄÄRTUSED

n	$P=0{,}99$	0,98	0,95	0,90	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,0006	0,00063	0,0039	0,0158	2,706	3,841	5,412	6,63
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,11	0,185	0,352	0,584	6,251	7,815	9,837	11,34
4	0,297	0,429	0,711	1,064	7,779	9,488	11,668	13,27
5	0,554	0,752	1,145	1,610	9,236	11,070	13,388	15,08
6	0,872	1,134	1,635	2,204	10,645	12,592	15,033	16,81
7	1,239	1,564	2,167	2,833	12,017	14,067	16,622	18,47
8	1,646	2,032	2,733	3,490	13,362	15,507	18,168	20,09
9	2,088	2,532	3,325	4,166	14,684	16,919	19,679	21,66
10	2,558	3,059	3,940	4,865	15,987	18,307	21,161	23,20
11	3,053	3,609	4,575	5,578	17,275	19,675	22,618	24,72
12	3,571	4,178	5,226	6,304	18,549	21,026	24,054	26,21
13	4,107	4,765	5,892	7,042	19,812	22,362	25,472	27,68
14	4,660	5,368	6,571	7,790	21,064	23,685	26,873	29,14
15	5,229	5,985	7,261	8,547	22,307	24,996	28,259	30,57
16	5,812	6,614	7,962	9,312	23,542	26,296	29,633	32,00
17	6,408	7,255	8,672	10,085	24,769	27,587	30,995	33,40
18	7,015	7,906	9,390	10,865	25,989	28,869	32,346	34,80
19	7,633	8,567	10,117	11,651	27,204	30,144	33,687	36,19
20	8,260	9,237	10,851	12,443	28,412	31,410	35,020	37,56
21	8,897	9,915	11,591	13,240	29,615	32,671	36,343	38,93
22	9,542	10,600	12,338	14,041	30,813	33,924	37,659	40,28
23	10,196	11,293	13,091	14,848	32,007	35,172	38,968	41,63
24	10,856	11,992	13,848	15,659	33,196	36,415	40,270	42,98
25	11,524	12,697	14,611	6,473	34,382	37,652	41,566	44,31
26	12,198	13,409	15,379	17,292	35,563	38,885	42,856	45,64
27	12,879	14,125	16,151	18,114	36,741	40,113	44,140	46,96
28	13,565	14,847	16,928	18,939	37,916	41,337	45,419	48,27
29	14,256	15,574	17,708	19,768	39,087	42,557	46,693	49,58
30	14,953	16,306	18,493	20,599	40,256	43,773	47,962	50,89

Lisa 10

z-KRITEERIUMI VÄÄRTUSED VASAKPOOLSE JAOTUSPINNA KORRAL

Jaotus-pind	z	Jaotus-pind	z	Jaotus-pind	z
0,0001	—3,719	0,045	—1,695	0,280	—0,583
0,0002	—3,540	0,050	—1,645	0,300	—0,524
0,0003	—3,432	0,055	—1,598	0,320	—0,468
0,0004	—3,353	0,060	—1,555	0,340	—0,412
0,0005	—3,291	0,065	—1,514	0,360	—0,358
0,001	—3,090	0,070	—1,476	0,380	—0,305
0,002	—2,878	0,075	—1,440	0,400	—0,253
0,003	—2,748	0,080	—1,405	0,420	—0,202
0,004	—2,652	0,085	—1,372	0,440	—0,151
0,005	—2,576	0,090	—1,341	0,460	—0,100
0,006	—2,512	0,095	—1,311	0,480	—0,050
0,007	—2,457	0,100	—1,282	0,500	0,000
0,008	—2,409	0,120	—1,175	0,520	0,050
0,009	—2,366	0,140	—1,080	0,540	0,100
0,010	—2,326	0,160	—0,994	0,560	0,151
0,015	—2,170	0,180	—0,915	0,580	0,202
0,020	—2,054	0,200	—0,842	0,600	0,253
0,025	—1,960	0,220	—0,772	0,620	0,305
0,030	—1,881	0,240	—0,706	0,640	5,358
0,035	—1,812	0,250	—0,6745	0,660	0,412
0,040	—1,751	0,260	—0,643	0,680	0,468

Jaotus-pind	z	Jaotus-pind	z
0,700	0,524	0,950	1,645
0,720	0,583	0,955	1,695
0,740	0,643	0,960	1,751
0,750	0,6745	0,965	1,812
0,760	0,706	0,970	1,881
0,780	0,772	0,975	1,960
0,800	0,842	0,980	2,054
0,820	0,915	0,985	2,170
0,840	0,994	0,990	2,326
0,860	1,080	0,991	2,366
0,880	1,175	0,992	2,409
0,900	1,282	0,993	2,457
0,905	1,311	0,994	2,512
0,910	1,341	0,995	2,576
0,915	1,372	0,996	2,652
0,920	1,403	0,997	2,748
0,925	1,440	0,998	2,878
0,930	1,476	0,999	3,090
0,935	1,514	0,9995	3,291
0,940	1,555	0,9996	3,353
0,945	1,598	0,9999	3,719

t-KRITEERIUMI VÄÄRTUSED

n	$P=0{,}8$	0,6	0,4	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	0,25335	0,52440	0,84162	1,28155	1,64485	1,95996	2,32634	2,57582

F-KRITEERIUMI VÄÄRTUSED

($P=0{,}95$ — ülemine rida,
$P=0{,}99$ alumine rida)

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,34	99,36	99,38	99,40	99,41	99,42
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11

Lisa 12 (*järg*)

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	4,96 10,04	4,10 7,56	3,71 6,55	3,48 5,99	3,33 5,64	3,22 5,39	3,14 5,21	3,07 5,06	3,02 4,95	2,97 4,85	2,94 4,78	2,91 4,71
11	4,84 9,65	3,98 7,20	3,59 6,22	3,36 5,67	3,20 5,32	3,09 5,07	3,01 4,88	2,95 4,74	2,90 4,63	2,86 4,54	2,82 4,46	2,79 4,40
12	4,75 9,33	3,88 6,93	3,49 5,95	3,26 5,41	3,11 5,06	3,00 4,82	2,92 4,65	2,85 4,50	2,80 4,39	2,76 4,30	2,72 4,22	2,69 4,16
13	4,67 9,07	3,80 6,70	3,41 5,74	3,18 5,20	3,02 4,86	2,92 4,62	2,84 4,44	2,77 4,30	2,72 4,19	2,67 4,10	2,63 4,02	2,60 3,96
14	4,60 8,86	3,74 6,51	3,34 5,56	3,11 5,03	2,96 4,69	2,85 4,46	2,77 4,28	2,70 4,14	2,65 4,03	2,60 3,94	2,56 3,86	2,53 3,80
15	4,54 8,68	3,68 6,36	3,29 5,42	3,06 4,89	2,90 4,56	2,79 4,32	2,70 4,14	2,64 4,00	2,59 3,89	2,55 3,80	2,51 3,73	2,48 3,67
16	4,49 8,53	3,63 6,23	3,24 5,29	3,01 4,77	2,85 4,44	2,74 4,20	2,66 4,03	2,59 3,89	2,54 3,78	2 49 3,69	2,45 3,61	2,42 3,55
17	4,45 8,40	3,59 6,11	3,20 5,18	2,96 4,67	2,81 4,34	2,70 4,10	2,62 3,93	2,55 3,79	2,50 3,68	2,45 3,59	2,41 3,52	2,38 3,45
18	4,41 8,28	3,55 6,01	3,16 5,09	2,93 4,58	2,77 4,25	2,66 4,01	2,58 3,85	2,51 3,71	2,46 3,60	2,41 3,51	2,37 3,44	2,34 3,37
19	4,38 8,18	3,52 5,93	3,13 5,01	2,90 4,50	2,74 4,17	2,63 3,94	2,55 3,77	2,48 3,63	2,43 3,52	2,38 3,43	2,34 3,36	2,31 3,30
20	4,35 8,10	3,49 5,85	3,10 4,94	2,87 4,43	2,71 4,10	2,60 3,87	2,52 3,71	2,45 3,56	2,40 3,45	2,35 3,37	2,31 3,30	2,28 3,23

Lisa 12 (järg)

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
21	4,32 8,02	3,47 5,78	3,07 4,87	2,84 4,37	2,68 4,04	2,57 3,81	2,49 3,65	2,42 3,51	2,37 3,40	2,32 3,31	2,28 3,24	2,25 3,17
22	4,30 7,94	3,44 5,72	3,05 4,82	2,82 4,31	2,66 3,99	2,55 3,76	2,47 3,59	2,40 3,45	2,35 3,35	2,30 3,26	2,26 3,18	2,23 3,12
23	4,28 7,88	3,42 5,66	3,03 4,76	2,80 4,26	2,64 3,94	2,53 3,71	2,45 3,54	2,38 3,41	2,32 3,30	2,28 3,21	2,24 3,14	2,20 3,07
24	4,26 7,82	3,40 5,61	3,01 4,72	2,78 4,22	2,62 3,90	2,51 3,67	2,43 3,50	2,36 3,36	2,30 3,25	2,26 3,17	2,22 3,09	2,18 3,03
25	4,24 7,77	3,38 5,57	2,99 4,68	2,76 4,18	2,60 3,86	2,49 3,63	2,41 3,46	2,34 3,32	2,28 3,21	2,24 3,13	2,20 3,05	2,16 2,99
26	4,22 7,72	3,37 5,53	2,98 4,64	2,74 4,14	2,59 3,82	2,47 3,59	2,39 3,42	2,32 3,29	2,27 3,17	2,22 3,09	2,18 3,02	2,15 2,96
27	4,21 7,68	3,35 5,49	2,96 4,60	2,73 4,11	2,57 3,79	2,46 3,56	2,37 3,39	2,30 3,26	2,25 3,14	2,20 3,06	2,16 2,98	2,13 2,93
28	4,20 7,64	3,34 5,45	2,95 4,57	2,71 4,07	2,56 3,76	2,44 3,53	2,36 3,36	2,29 3,23	2,24 3,11	2,19 3,03	2,15 2,95	2,12 2,90
29	4,18 7,60	3,33 5,42	2,93 4,54	2,70 4,04	2,54 3,73	2.43 3,50	2,35 3,33	2,28 3,20	2,22 3,08	2,18 3,00	2,14 2,92	2,10 2,87
30	4,17 7,56	3,32 5,39	2,92 4,51	2,69 4,02	2,53 3,70	2,42 3,47	2,34 3,30	2,27 3,37	2,21 3,06	2,16 2,98	2,12 2,90	2,09 2,84
32	4,15 7,50	3,30 5,34	2,90 4,46	2,67 3,97	2,51 3,66	2,40 3,42	2,32 3,25	2,25 3,12	2,19 3,01	2,14 2,94	2,10 2,86	2,07 2,80

Lisa 12 (järg)

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
34	4,13 7,44	3,28 5,29	2,88 4,42	2,65 3,93	2,49 3,61	2,38 3,38	2,30 3,21	2,23 3,08	2,17 2,97	2,12 2,89	2,08 2,82	2,05 2,76
36	4,11 7,39	3,26 5,25	2,86 4,38	2,63 3,89	2,48 3,58	2,36 3,35	2,28 3,18	2,21 3,04	2,15 2,94	2,10 2,86	2,06 2,78	2,03 2,72
38	4,10 7,35	3,25 5,21	2,85 4,34	2,62 3,86	2,46 3,54	2,35 3,32	2,26 3,15	2,19 3,02	2,14 2,91	2,09 2,82	2,05 2,75	2,02 2,69
40	4,08 7,31	3,23 5,18	2,84 4,31	2,61 3,83	2,45 3,51	2,34 3,29	2,25 3,12	2,18 2,99	2,12 2,88	2,07 2,80	2,04 2,73	2,00 2,66
42	4,07 7,27	3,22 5,15	2,83 4,29	2,59 3,80	2,44 3,49	2,32 3,26	2,24 3,10	2,17 2,96	2,11 2,86	2,06 2,77	2,02 2,70	1,99 2,64
44	4,06 7,24	3,21 5,12	2,82 4,26	2,58 3,78	2,43 3,46	2,31 3,24	2,23 3,07	2 16 2,94	2,10 2,84	2,05 2,75	2,01 2,68	1,98 2,62
46	4,05 7,21	3,20 5,10	2,81 4,24	2,57 3,76	2,42 3,44	2,30 3,22	2,22 3,05	2,14 2,92	2,09 2,82	2,04 2,73	2,00 2,66	1,97 2,60
48	4,04 7,19	3,19 5,08	2,80 4,22	2,56 3,74	2,41 3,42	2 30 3,20	2,21 3,04	2,14 2,90	2,08 2,80	2,03 2,71	1,99 2,64	1,96 2,58
50	4,03 7,17	3,18 5,06	2,79 4,20	2,56 3,72	2,40 3,41	2,29 3,18	2,20 3,02	2,13 2,88	2,07 2,78	2,02 2,70	1,98 2,62	1,95 2,56
55	4,02 7,12	3,17 5,01	2,78 4,16	2,54 3,68	2,38 3,37	2,27 3,15	2,18 2,98	2,11 2,85	2,05 2,75	2,00 2,66	1,97 2,59	1,93 2,53
60	4,00 7,08	3,15 4,98	2,76 4,13	2,52 3,65	2,37 3,34	2,25 3,12	2,17 2,95	2,10 2,82	2,04 2,72	1,99 2,63	1,95 2,56	1,92 2,50

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
65	3,99 7,04	3,14 4,95	2,75 4,10	2,51 3,62	2,36 3,31	2,24 3,09	2,15 2 93	2,08 2,79	2,02 2,70	1,98 2,61	1,94 2,54	1,90 2,47
70	3,98 7,01	3,13 4,92	2,74 4,08	2,50 3,60	2,35 3,29	2,23 3,07	2,14 2,91	2,07 2,77	2,01 2,67	1,97 2,59	1,93 2,51	1,89 2,45
80	3,96 6,96	3,11 4,88	2,72 4,04	2,48 3,56	2,33 3,25	2,21 3,04	2,12 2,87	2,05 2,74	1,99 2,64	1,95 2,55	1,91 2,48	1,88 2,41
100	3,94 6,90	3,09 4,82	2,70 3,98	2,46 3,51	2,30 3,20	2,19 2,99	2,10 2,82	2,03 2,69	1,97 2,59	1,92 2,51	1,88 2,43	1,85 2,36
125	3,92 6,84	3,07 4,78	2,68 3,94	2,44 3,47	2,29 3,17	2,17 2,95	2,08 2,79	2,01 2,65	1,95 2,56	1,90 2,47	1,86 2,40	1,83 2,33
150	3,91 6,81	3,06 4,75	2,67 3,91	2,43 3,44	2,27 3,14	2,16 2,92	2,07 2,76	2,00 2.62	1,94 2,53	1,89 2,44	1,85 2,37	1,82 2,30
200	3,89 6,76	3,04 4,71	2,65 3,88	2,41 3,41	2,26 3,11	2,14 2,90	2,05 2,73	1,98 2,60	1,92 2,50	1,87 2,41	1,83 2,34	1,80 2,28
400	3,86 6,70	3,02 4,66	2,62 3,83	2,39 3,36	2,23 3,06	2,12 2,85	2,03 2,69	1,96 2,55	1,90 2,46	1,85 2,37	1,81 2,29	1,78 2,23
1,000	3,85 6,66	3,00 4,62	2,61 3,80	2,38 3,34	2,22 3,04	2,10 2,82	2,02 2,66	1,95 2,53	1,89 2,43	1,84 2,34	1,80 2,26	1,76 2,20
8	3,84 6,64	2,99 4,60	2,60 3,78	2,37 3,32	2,21 3,02	2,09 2,80	2,01 2,64	1,94 2,51	1,88 2,41	1,83 2,32	1,79 2,24	1,75 2,18

Lisa 12 (*järg*)

n_2 \ n_1	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
1	245 6142	246 6169	248 6208	249 6234	250 6258	251 6286	252 6302	253 6323	253 6334	254 6352	254 6361	254 6366
2	19,42 99,43	19,43 99,44	19,44 99,45	19,45 99,46	19,46 99,47	19,47 99,48	19,47 99,48	19,48 99,49	19,49 99,49	19,49 99,49	19,50 99,50	19,50 99,50
3	8,71 26,92	8,69 26,83	8,66 26,69	8,64 26,60	8,62 26,50	8,60 26,41	8,58 26,35	8,57 26,27	8,56 26,23	8,54 26,18	8,54 26,14	8,53 26,12
4	5,87 14,24	5,84 14,16	5,80 14,02	5,77 13,93	5,74 13,83	5,71 13,74	5,70 13,69	5,68 13,61	5,66 13,57	5,65 13,52	5,64 13,48	5,63 13,46
5	4,64 9,77	4,60 9,68	4,56 9,55	4,53 9,47	4,50 9,38	4,46 9,29	4,44 9,24	4,42 9,17	4,40 9,13	4,38 9,07	4,37 9,04	4,36 9,02
6	3,96 7,60	3,92 7,52	3,87 7,39	3,84 7,31	3,81 7,23	3,77 7,14	3,75 7,09	3,72 7,02	3,71 6,99	3,69 6,94	3,68 6,90	3,67 6,88
7	3,52 6,35	3,49 6,27	3,44 6,15	3,41 6,07	3,38 5,98	3,34 5,90	3,32 5,85	3,29 5,78	3,28 5,75	3,25 5,70	3,24 5,67	3,23 5,65
8	3,23 5,56	3,20 5,48	3,15 5,36	3,12 5,28	3,08 5,20	3,05 5,11	3,03 5,03	3,00 5,00	2,98 4,96	2,96 4,91	2,94 4,88	2,93 4,86
9	3,02 5,00	2,98 4,92	2,93 4,80	2,90 4,73	2,86 4,64	2,82 4,56	2,80 4,51	2,77 4,45	2,76 4,41	2,73 4,36	2,72 4,33	2,71 4,31
10	2,85 4,60	2,82 4,52	2,77 4,41	2,74 4,33	2,70 4,25	2,67 4,17	2,64 4,12	2,61 4,05	2,59 4,01	2,56 3,96	2,55 3,93	2,54 3,91
11	2,74 4,29	2,70 4,21	2,65 4,10	2,61 4,02	2,57 3,94	2,53 3,86	2,50 3,80	2,47 3,74	2,45 3,70	2,42 3,66	2,41 3,62	2,40 3,60

Lisa 12 (*järg*)

n_2 \ n_1	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
12	2,64 4,05	2,60 3,98	2,54 3,85	2,50 3,78	2,46 3,70	2,42 3,61	2,40 3,56	2,36 3,49	2,35 3,46	2,32 3,41	2,31 3,38	2,30 3,36
13	2,55 3,89	2,51 3,78	2,45 3,67	2,42 3,59	2,38 3,51	2,34 3,42	2,32 3,37	2,28 3,30	2,26 3,27	2,24 3,21	2,22 3,18	2,21 3,16
14	2,48 3,70	2,44 3,62	2,39 3,51	2,35 3,43	2,31 3,34	2,27 3,26	2,24 3,21	2,21 3,14	2,19 3,11	2,16 3,06	2,14 3,02	2,13 3,00
15	2,43 3,56	2,39 3,48	2,33 3,36	2,29 3,29	2,25 3,20	2,21 3,12	2,18 3,07	2,15 3,00	2,12 2,97	2,10 2,92	2,08 2,89	2,07 2,87
16	2,37 3,45	2,33 3,37	2,28 3,25	2,24 3,18	2,20 3,10	2,16 3,01	2,13 2,96	2,09 2,89	2,07 2,86	2,04 2,80	2,02 2,77	2,01 2,75
17	2,33 3,35	2,29 3,27	2,23 3,16	2,19 3,08	2,15 3,00	2,11 2,92	2,08 2,86	2,04 2,79	2,02 2,76	1,99 2,79	1,97 2,67	1,96 2,65
18	2,90 3,27	2,25 3,19	2,19 3,07	2,15 3,00	2,11 2,91	2,07 2,83	2,04 2,78	2,00 2,71	1,98 2,68	1,95 2,62	1,93 2,59	1,92 2,57
19	2,25 3,19	2,21 3,32	2,15 3,00	2,11 2,92	2,07 2,84	2,02 2,76	2,00 2,70	1,96 2,63	1,94 2,60	1,91 2,54	1,90 2,51	1,88 2,49
20	2,23 3,13	2,18 3,05	2,12 3,94	2,08 2,86	2,04 2,77	1,99 2,69	1,96 2,63	1,92 2,56	1,90 2,53	1,87 2,47	1,85 2,44	1,84 2,42
21	2,20 3,07	2,15 2,99	2,09 2,88	2,05 2,80	2,00 2,72	1,96 2,63	1,93 2,58	1,89 2,51	1,87 2,47	1,84 2,42	1,82 2,38	1,81 2,36
22	2,18 3,02	2,13 2,94	2,07 2,83	2,03 2,75	1,98 2,67	1,93 2,58	1,91 2,53	1,87 2,46	1,84 2,42	1,81 2,37	1,80 2,33	1,78 2,31

Lisa 12 (*järg*)

n_2 \ n_1	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
23	2,14 2,97	2,10 2,89	2,04 2,78	2,00 2,70	1,96 2,62	1,91 2,53	1,88 2,48	1,84 2,41	1,82 2,37	1,79 2,32	1,77 2,28	1,76 2,26
24	2,13 2,93	2,09 2,85	2,02 2,53	1,98 2,60	1,94 2,58	1,89 2,49	1,86 2,44	1,82 2,36	1,80 2,33	1,76 2,27	1,74 2,23	1,73 2,21
25	2,11 2,39	2,06 2,95	2,00 2,70	1,96 2,52	1,92 2,54	1,87 2,45	1,84 2,40	1,80 2,32	1,77 2,29	1,74 2,23	1,72 2,19	1,71 2,17
26	2,19 2,86	2,95 2,77	1,99 2,66	1,95 2,58	1,90 2,50	1,85 2,41	1,82 2,36	1,78 2,28	1,76 2,25	1,72 2,19	1,70 2,15	1,69 2,13
27	2,08 2,83	2,03 2,74	1,97 2,63	1,93 2,55	1,88 2,47	1,84 2,38	1,80 2,33	1,76 2,25	1,74 2,21	1,71 2,16	1,68 2,12	1,67 2,10
28	2,06 2,80	2,02 2,71	1,96 2,60	1,91 2,52	1,87 2,44	1,81 2,35	1,78 2,30	1,75 2,22	1,72 2,18	1,69 2,13	1,67 2,09	1,65 2,06
29	2,05 2,77	2,00 2,68	1,94 2,57	1,90 2,49	1,85 2,41	1,80 2,32	1,77 2,27	1,73 2,19	1,71 2,15	1,68 2,10	1,65 2,06	1,64 2,03
30	2,04 2,74	1,99 2,66	1,93 2,55	1,89 2,47	1,84 2,38	1,79 2,29	1,76 2,24	1,72 2,16	1,69 2,13	1,66 2,07	1,64 2,03	1,62 2,01
32	2,02 2,70	1,97 2,62	1,91 2,51	1,86 2,42	1,82 2,34	1,76 2,25	1,74 2,20	1,69 2,12	1,67 2,08	1,64 2,02	1,61 1,98	1,59 1,96
34	2,00 2,66	1,95 2,58	1,89 2,47	1,84 2,38	1,80 2,30	1,74 2,21	1,71 2,15	1,67 2,08	1,64 2,04	1,61 1,98	1,59 1,94	1,57 1,91
36	1,98 2,62	1,93 2,54	1,87 2,43	1,82 2,35	1,78 2,26	1,72 2,17	1,69 2,12	1,65 2,04	1,62 2,00	1,59 1,94	1,56 1,90	1,55 1,87
38	1,96 2,59	1,92 2,51	1,85 2,40	1,80 2,32	1,76 2,22	1,71 2,14	1,67 2,08	1,63 2,00	1,60 1,97	1,57 1,90	1,54 1,86	1,53 1,84
40	1,95 2,56	1,90 2,49	1,84 2,37	1,79 2,29	1,74 2,20	1,69 2,11	1,66 2,05	1,61 1,97	1,59 1,94	1,55 1,88	1,53 1,84	1,51 1,81
42	1,94 2,54	1,89 2,46	1,82 2,35	1,78 2,26	1,73 2,17	1,68 2,08	1,64 2,02	1,60 1,94	1,57 1,91	1,54 1,85	1,51 1,80	1,49 1,78
44	1,92 2,52	1,88 2,44	1,81 2,32	1,76 2,24	1,72 2,15	1,66 2,06	1,63 2,00	1,58 1,92	1,56 1,88	1,52 1,82	1,50 1,78	1,48 1,75
46	1,91 2,50	1,87 2,42	1,80 2,30	1,75 2,22	1,71 2,13	1,65 2,04	1,62 1,98	1,57 1,90	1,54 1,86	1,51 1,80	1,48 1,76	1,46 1,72
48	1,90 2,48	1,86 2,40	1,79 2,28	1,74 2,20	1,70 2,11	1,64 2,02	1,61 1,96	1,56 1,88	1,53 1,84	1,50 1,78	1,47 1,73	1,45 1,70
50	1,90 2,46	1,85 2,39	1,78 2,26	1,74 2,18	1,69 2,10	1,63 2,00	1,60 1,94	1,55 1,86	1,52 1,82	1,48 1,76	1,46 1,71	1,44 1,68
55	1,88 2,43	1,83 2,35	1,76 2,23	1,72 2,15	1,67 2,06	1,61 1,96	1,58 1,90	1,52 1,82	1,50 1,78	1,46 1,71	1,43 1,66	1,41 1,64
60	1,86 2,40	1,81 2,32	1,75 2,20	1,70 2,12	1,65 2,03	1,59 1,93	1,56 1,87	1,50 1,79	1,48 1,74	1,44 1,68	1,41 1,63	1,39 1,60
65	1,85 2,37	1,80 2,30	1,73 2,18	1,68 2,09	1,63 2,00	1,57 1,90	1,54 1,84	1,49 1,76	1,46 1,71	1,42 1,64	1,39 1,60	1,37 1,56
70	1,84 2,35	1,79 2,28	1,72 2,15	1,67 2,07	1,62 1,98	1,56 1,88	1,53 1,82	1,47 1,74	1,45 1,69	1,40 1,62	1,37 1,56	1,35 1,53

Lisa 12 (*järg*)

n_2 \ n_1	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
80	1,82	1,77	1,70	1,65	1,60	1,54	1,51	1,45	1,42	1,38	1,35	1,32
	2,32	2,24	2,11	2,03	1,94	1,84	1,78	1,70	1,65	1,57	1,52	1,49
100	1,79	1,75	1,68	1,63	1,57	1,51	1,48	1,42	1,39	1,34	1,30	1,28
	2,26	2,19	2,06	1,98	1,89	1,79	1,73	1,64	1,59	1,51	1,46	1,43
125	1,77	1,72	1,65	1,60	1,55	1,49	1,45	1,39	1,36	1,31	1,27	1,25
	2,23	2,15	2,03	1,94	1,85	1,75	1,68	1,59	1,54	1,46	1,40	1,37
150	1,76	1,71	1,64	1,59	1,54	1,47	1,44	1,37	1,34	1,29	1,25	1,22
	2,20	2,12	2,00	1,91	1,83	1,72	1,66	1,56	1,51	1,43	1,37	1,33
200	1,74	1,69	1,62	1,57	1,52	1,45	1,42	1,35	1,32	1,26	1,22	1,19
	2,17	2,09	1,97	1,88	1,79	1,69	1,62	1,53	1,48	1,39	1,33	1,28
400	1,72	1,67	1,60	1,54	1,49	1,42	1,38	1,32	1,28	1,22	1,16	1,13
	2,12	2,04	1,92	1,84	1,74	1,64	1,57	1,47	1,42	1,32	1,24	1,19
1,000	1,70	1,65	1,58	1,53	1,47	1,41	1,36	1,30	1,26	1,19	1,13	1,08
	2,09	2,01	1,89	1,81	1,71	1,61	1,54	1,44	1,38	1,28	1,19	1,11
8	1,69	1,64	1,57	1,52	1,46	1,40	1,35	1,28	1,24	1,17	1,11	1,00
	2,07	1,99	1,87	1,79	1,69	1,59	1,52	1,41	1,36	1,25	1,15	1,00

AINEREGISTER

aastasisesed võnkumised 183
absoluutarv 13
absoluutarvude rida 149
absoluutne juurdekasv 31, 151 ... 154
— — juurdekasvutempo 1% kohta 160
— suurus 13
aegrea elementide keskmine 162 ... 164
— interpoleerimine 178
— sobivuse hindamine 232 ... 235
— võnked 181
aegrida 14, 15, 28, 29, 34, 148, 149
aegridade elementaaranalüüs 151
— nihutamine 191
— tasandamine 166
— viimine ühele alusele 185 ... 188
agregaat 195, 196
agregaatindeks 197
aheindeks 29, 155, 193
aheljuurdekasv 152
aheljuurdekasvutempo 156
ahelkasvutempo 29, 30, 154
ajalise muutumise intensiivsus 28
— — iseloomustus 31, 37, 52
algmoment 81
alternatiivne tunnus 12, 68, 95, 96, 98, 99, 107, 136
alusindeks 29, 155, 193
alusjuurdekasv 153
alusjuurdekasvutempo 157
aluskasvutempo 29, 30, 154
analüütiline arvjoonis 21
— rühmitamine 18
— tasandamine 161, 171
ankeetvaatlus 92
aproksimeerimisviga 230
arengusuhtarv 28
arengutendentsi uurimine 151, 229
aritmeetiline keskmine 38 ... ... 47, 49, 50, 82, 83
arvjoonis 21 ... 24, 165, 166, 170, 174, 179, 188
asendikeskmine 38, 39
assotsiatsioonikordaja 136
astmekeskmine 38, 50, 51
astmeline väljavõtt 110, 111
asümmeetriakoefitsient 77, 88, 89
asümptood 235
atributiivne tunnus 12
autokorrelatsioon 232

baasindeks 29, 193
baaskasvutempo 29
Bowle'i diferentseerumiskoefitsient 63
Braveais' korrelatsioonikordaja 126

determinatsioonikordaja 146, 147
detsiil 39, 62
diferents 166, 172, 173, 177
dispersioon 48, 63, 65
— momentide meetodil 68, 83, 84
dispersioonanalüüs 70, 118
dispersiooni omadused 66, 67
dispersioonide liitmine 69
dominant 54
dünaamikarida 148
dünaamikasuhtarv 28, 29, 37

ebasümmeetriline variatsioonrida 76
ebavõrdsete seeriatega väljavõtt 106, 108
eksimisrisk 102, 216
eksperthinnangute meetod 242, 244
eksponentfunktsioon 227, 228
ekstrapoleerimine 180, 225 ... ... 230, 239, 240
ekstsess 77, 89
elastsuskordaja 145
empiiriline jaotuskõver 78 ... 80
erinevuse olulisus 209
— — jaotumisel 211
— — varieerumisel 218, 219
— — väikeste väljavõtukogumite keskmiste puhul 219 ... 221
— — väljavõtukogumite puhul 214, 215
esimest järku algmoment 82
— — tingmoment 47, 83, 86
esinduslikkus 92
esindusviga 94, 95
esinemissagedus 42

Fisheri F-kriteerium 218, 231
funktsionaalne seos 117

Galtoni kvartiilhälve 63
Gaussi-Laplace'i kõver 70, 76
geomeetriline keskmine 19, 38, 52, 53, 160, 161
Gompertzi funktsioon 239, 240
graafik 21
graafiline interpoleerimine 179

harmooniline keskmine 38, 48 ... 50, 200
hinnaindeks 197, 199, 200
histogramm 21, 23, 56
hooajalised võnked 183
hälbe aritmeetiline keskmine 83
hälbimissuhtarv 33, 34
hälvete ruutkeskmine 84
hüpotees 207, 209, 210, 213, 214, 218, 220, 222

indeks 28, 193
indeksdiagramm 22
indeksiteooria 180, 192
individuaalindeks 29, 193, 194
intensiivsussuhtarv 35 ... 37
interpoleerimine 178, 179
intervallimata rida 15
intervallitud variatsioonrida 46, 55, 84, 86, 87
intervallrida 15, 150

jaotuse vastavuse kontroll 210
jaotuskõver 54, 71, 77
jaotusrida 14, 118
jaotussagedus 208
joondiagramm 21
juhuslik suurus 13
— sündmus 11
juhuslike arvude tabel 271
juhuslikkuse printsiip 93
juhuslikud võnked 181
juhuväljavõtt 93, 96, 97
juurdekasvutempo 151, 156 ... 160

järjestusnumbrite korrelatsioonikordaja 125, 126
jääkdispersioon 143

kaal 42, 49, 50, 197
kaalutud aritmeetiline keskmine 39, 42, 44
— geomeetriline keskmine 53
— harmooniline keskmine 48, 49
— libisev keskmine 171
— logaritmikeskmine 53
— mahukeskmine 38
kahe aegrea elementide seos 232
kartogramm 22, 24
kartodiagramm 22, 24
katse 11
kasvutempo 151, 154 ... 156
keskmine 38
— elastsuskordaja 145
— esindusviga 95, 110
— indeks 200
— kasvutempo 52, 53, 151, 160 ... 162, 225 227
— lineaarhälve 63, 64
keskmiseajaline prognoos 226
keskmiste omadused 51
— rida 149
keskmoment 81
kogum 10, 11
kolmandat järku parabool 173, 175, 177
— — tingmoment 89
kombinatsioonitabel 132
kombineeritud rühmitamine 17, 132
— väljavõtt 110
kontingentsuse kordaja 136
koondindeks 197
koordinaatvõrk 22
koordinatsioonisuhtarv 27
koostissuhtarv 25
korduvistega juhuväljavõtt 96 ... 100
— väljavõtt 94
kordumisteta juhuväljavõtt 96, 97, 99
— väljavõtt 94
korrelatiivne seos 110, 117 ... 121
korrelatsioon 117
korrelatsioonanalüüs 118
korrelatsioonidiagramm 22, 24, 122, 123, 125
korrelatsiooniindeks 119, 143
korrelatsioonikoefitsiendi usaldatavus 232
korrelatsioonikordaja 14, 119, 125
korrelatsioonimoment 127
korrelatsioonitabel 132, 133
kovariatsioon 127
F-kriteerium 218, 231, 232, 277
z-kriteerium 113, 214 ... 216, 275
t-kriteerium 113, 219, 276
— ebavõrdse dispersiooni korral 221
— kogumi muutuse olulisuse hindamiseks 224
— võrdse dispersiooni korral 219, 220
χ^2-kriteerium 208, 210 ... 213, 274
kronoloogiline keskmine 38, 51, 52, 162, 163
— rida 148
kvalitatiivne tunnus 12, 136
kvalitatiivselt ühtlane kogum 194
kvalitatiivsete tunnuste korrelatsioon 136
kvantiil 39
kvantitatiivne tunnus 12, 95, 99, 107
kvartiil 39, 60, 61
kõverjooneline seos 120

laagerdamisaeg 191
lahtine äärerühm 46, 47
libisemissammu pikkus 169
lihtindeks 154, 193, 196
lihtne aritmeetiline keskmine 39, 41, 164, 168
— astmeline väljavõtt 111
— jaotusrida 14
— mahukeskmine 38
— rühmitamine 17
— statistiline rida 50, 64 ... 67, 70
liitindeks 193, 196, 200
liitmismenetlus 86, 87
lintdiagramm 21, 23
lineaarfunktsioon 173, 229, 230
lineaarne korrelatsioonikordaja 126, 127, 128, 130, 190
— seos 120
logaritmkeskmine 53, 161
logistiline funktsioon 235 239
lühiajaline prognoos 226

mahukeskmine 38
massnähtus 9, 10
matemaatiline ootus 39
mediaan 39, 57 ... 59
mediaanintervall 57
mehaaniline tasandamine 166
— väljavõtt 93, 100, 101
mitmene seos 122
mittekõikne vaatlus 92
mitteparameetriline kriteerium 208
mitteproportsionaalne väljavõtukogum 104
moment 39, 81
momentide meetod 47, 68, 83
momentrida 15, 22, 51, 52, 149, 162, 168, 227
monograafiline meetod 92
mood 39, 54 ... 56
moodintervall 55, 56
multiseos 122
muutumatu kordaja 26
muutuva struktuuri indeks 202, 203
mõjufaktor 119
mõjur 117 ... 119

negatiivne asümmeetria 76, 77
— ekstsess 91
— juurdekasv 153
— juurdekasvutempo 158
Newtoni interpoleerimisvalem 179, 180
normaaljaotus 70, 76, 94
normaaljaotuskõver 70, 76, 269
normaalvõrrandite süsteem 139
normatiivne prognoosimine 243
normhälve 112, 113, 128
nullhüpotees 211 ... 214, 216, 218, 224
nullpunkt 22
nõudluse uurimine 146
nähtus 10
nähtuse arenemise suund 164
nähtuste ajaline muutus 148, 180, 181, 183, 185
näitaja 14, 25

olulisuse piir 210
operatiivne arvestus 10
osakogum 25
osakogumite dispersioonide keskmine 69
osakorrelatsioon 122
osaline vaatlus 122
osamäär 25
osatähtsus 25

paariskorrelatsioonikordaja 126
paarisseos 122
parameeter 14

parandatud dispersioon 111, 112
— standardhälve 111, 112
paremkaldeline ebasümmeetrilisus 76
perioodrea koondamine 166
perioodrida 15, 22, 149, 150, 151, 164, 227
pertsentiil 62
pidev perioodrida 150
— tunnus 12
pikaajaline prognoos 226
plaani täitmise suhtarv 31, 33
plaanisuhtarv 31, 33
positiivne asümmeetria 77, 89
prognoos 225, 226
prognooshinnang 225, 227, 229, 230, 239, 243
prognoosimine 225
proportsionaalne väljavõtukogum 105
proportsionaalsuse koefitsient 138
protsent 31
protsentiil 62
protsess 11
puhtakujuline juhuväljavõtt 96
põhimassimeetod 92
pöördvõrdeline seos 120, 121
püsiva struktuuri indeks 202, 203

rahvastikupüramiid 21
rajoonitud väljavõtt 102
rea hälvete korrelatsiooni rangus 188, 190
— suhteline püstakus 90
regressioon 117
regressioonanalüüs 118
regressioonijoon 120, 121, 138
regressioonijoone võrrand 121
regressioonikoefitsiendi usaldatavus 232
regressioonikordaja 140, 141, 142, 145
regressioonisirge 138
regressioonivõrrand 138, 232
representatiivsus 93
representatiivsusviga 94
rida 14
ridade diferentside korrelatsioon 188, 190, 191
— hälvete korrelatsioon 188
— tasandamine 165
— viimine ühele alusele 185 ... 188
ridadevaheline korrelatsioon 185, 188
ruutkeskmine 51, 82
rühmadevaheline dispersioon 69
rühmdispersioonide keskmine 69, 103
rühmitamine 17
rühmrida 15

sagedus 15
sagedussuhtarv 36
sageduste järgsumma 57
— summa 18
samaajaljsed muutused 185
seeriasisene informatsioon 106
seeriatevaheline dispersioon 107, 108
seeriaväljavõtt 93, 106
seeriaväljavõtu esindusviga 106 ... 108
sektordiagramm 21, 23
sekundaarne suurus 25
seos 117 ... 119
seose graafiline mudel 121
— intensiivsuse näitaja 143

seose rangus 118, 119, 143, 188
— suund 120, 121
seosearvjoonis 21
seosvalem 49, 50
sirge 229, 230
sirgjooneline seos 120, 121
skaala 22
standardhälve 63, 70, 71, 181
standardiseeritud regressioonikordaja 142
standardviga 231
statistika 9
— üldteooria 9, 39
statistiline hüpotees 207, 208
— prognoos 225, 227, 243
— representatiivsus 93
— rida 14, 15
— tõenäosuslik seos 117
— vaatlus 12
statistilise rea dominant 54
— — keskliige 57
struktuuriline rühmitamine 17
struktuurarvjoonis 21
struktuurikeskmine 38
struktuurinihe 202, 203
struktuurinihete indeks 202 ... 204
struktuurisuhtarv 25 ... 27, 202 ... 204
struktuurisuhtarvude summa 26
Studenti jaotus 112 ... 114
— *t*-kriteerium 219
— tõenäosuste jaotus 111
suhtarv 13, 25, 193
suhtarvude rida 149
suhteline ajaline muutus 193, 194
— muutumine 145
— suurus 13, 25
suhteliste sageduste järgsummade kõver 59
suunatud väljavõtuviis 93
suurus 13, 25
suuruse ühtlane muutus 120
suurväljavõtt 111
sõltuvus 117 ... 119
sõre perioodrida 150, 151
— tunnus 12
sõreda variatsioonrea mediaan 57
sümmeetriline variatsioonrida 57
sündimuskoefitsient 36
sündmus 11
sündmuste kogum 11
süstemaatiline viga 230, 231

tabel 20
tagatud juhuslikkus 92, 96
tarbimise uurimine 146
tasandamine 165, 166
— kõverjoonega 166
— libiseva keskmisega 166 ... 169
— paraboliga 175, 177
— sirgega 166, 173, 174
tasandatud rea vastavus 230, 231
tasandusjoon 166
tasanduskõver 173
tase 152
tegur 118, 119
teguriindeks 197, 199
tegurtunnus 120, 121
teist järku algmoment 82
— — keskmoment 82, 83
— — parabool 173, 175, 177, 299
— — tingmoment 83, 86
teoreetiline jaotuskõver 78
— jaotussagedus 208
— korrelatsioonisuhe 143
— sagedus 78
— variatsioonkõver 78, 79
teoreetilise korrelatsioonisuhte ruut 146

territoriaalne üksus 35
tihedussuhtarv 36
tinglik keskmine hind 203
— maksumus 195
tinglikult sõre tunnus 12
tingmoment 47, 81, 83, 86, 87
toodangu mahu üldindeks 197, 200
— maksumus 195, 196
— maksumuse indeks 196, 197
traditsiooniline tähistus 16
trend 225, 230
tsentiil 39, 62
tsonaalne väljavõtt 102
tulpdiagramm 21, 23
tunnus 12
tõenäosusintegraali väärtused 95, 273
tõenäosuskordaja 94, 95, 113
tõenäosuslik suurus 39
tõenäosusteooria 65, 70, 92
tüpoloogiline rühmitamine 17
tüüpväljavõtt 93, 102
tüüpväljavõtu esindusviga 103 ... 105

usaldatavustõenäosus 215, 231, 232

vaatlus 11
vabadusastmete arv 112, 209
vahede meetod 172
vahemlik perioodrida 151
variandi kaal 42 ... 44
— osatähtsus 45
variant 15, 16, 38, 41 ... 44, 49
variantide erisus 63
— sagedus 15, 15, 38, 76
— sümmeetriline jaotus 76
variatsioonamplituud 63
variatsioonikoefitsient 63, 64, 72
variatsiooninäitarv 14, 63
variatsiooninäitarvude arvutamine 72 ... 75
variatsioonisuhtarv 34
variatsiooniulatus 63, 64, 73
variatsioonrea astmekeskmine 50
— dispersioon 65 ... 67
— ekstsess 77
— keskmine lineaarhälve 64
— kuju 78, 88
— kuupkeskmine 51
— kvartiilid 60
— mediaan 57
— mood 56
— ruutkeskmine 51
— standardhälve 70
— sümmeetrilisus 88, 89
variatsioonrida 14, 15, 34, 38, 46 ... 48
varieerumine 12, 63, 64
vasakkaldeline asümmeetria 89
— ebasümmeetrilisus 76
vastastikune sõltuvus 118
viitaeg 232
visuaalne regressionikõver 125
— regressioonisirge 125
— trend 125
võimatu sündmus 11
võnked 181 ... 183
võrdeline seos 120, 121
võrdlevmonograafiline meetod 92
võrdlusarvjoonis 21
võrdlussuhtarv 35
võrreldavus 185
vähimruutude meetod 121, 139, 166, 171, 172, 175
väikeväljavõtt 93, 111 ... 116

väikeväljavõtu esindusviga 112
väljavõtteline vaatlus 92...94, 122, 208
väljavõtuaste 110, 111
väljavõtukeskmiste võrdlus *z*-kriteeriumiga 216
väljavõtukogum 92...95, 111
väljavõtukogumi dispersioon 97
— elementide arv 99
— karakteristik 14
väljavõtuvahemik 101

ühismõõtsustaja 195...197
ühismõõtsuskoefitsient 195
ühismõõtsustamine 195
ühtlane arengutendents 226
üksiknähtus 10
ülddispersioon 69
üldindeks 193, 194, 196
üldine arengutendents 151, 164, 165, 178, 180, 225, 229
üldistamine 178, 180
üldkogum 92, 94
üldkogumi dispersioon 97
— jagunemine 25
— karakteristik 14, 94
üldkorrelatsioon 122
üleminek diferentsidelt tuletistele 173
ümardiagramm 21, 23

KASUTATUD KIRJANDUSE LOETELU

1. Mereste, U. Majandusteaduse areng kokkupuudetes muude teadustega. Majandusteadus ja rahvamajandus. Aastaraamat 1967/68. Tln., «Eesti Raamat», 1969, lk. 112...130.
2. Mereste, U. Statistika üldteooria. Tln., «Valgus», 1975. 496 lk.
3. Mendel, L., Mereste, U. Arvjoonised. Trt., TRÜ, 1963. 116 lk.
4. Герчук Я. П. Графические методы в статистике. М., «Статистика», 1968. 212 с.
5. Венецкий И. Г., Венецкая В. И. Основные математико-статистические понятия и формулы в экономическом анализе. М., «Статистика», 1974. 280 с.
6. Джини К. Средние величины. М., «Статистика», 1970. 448 с.
7. Виноградова Н. М. и др. Общая теория статистики. М., «Статистика», 1968. 384 с.
8. Мот Ж. Статистические предвидения и решения на предприятии. М., «Прогресс», 1966. 542 с.
9. Венецкий И. Г., Кильдишев Г. С. Основы теории вероятностей и математической статистики. М., «Статистика», 1968. 360 с.
10. Долгушевский Ф. Г. и др. Общая теория статистики. М., «Статистика», 1967. 382 с.
11. Езекиэл М. и Фокс К. А. Методы анализа корреляций и регрессий. М., «Статистика», 1966. 560 с.
12. Статистический словарь. М., «Статистика», 1965. 708 с.
13. Дружинин Н. К. Математическая статистика в экономике. М., «Статистика», 1971. 264 с.
14. Eesti NSV rahvamajandus 1970. aastal. Statistiline aastaraamat. Tln., «Statistika» Eesti Osakond, 1971. 412 lk.
15. Mereste, U. Poolaritmeetilisi ääremärkusi. — «Keel ja Kirjandus», 1963, nr. 1, lk. 33...37.

16. Mereste, U. Täiendavaid peatükke majandusliku analüüsi kursusele. Tln., TPI, 1969. 108 lk.
17. Мересте У. Очерки по индексной теории. — «Труды Таллинского политехнического института», 1969, серия Б, № 29, 172 с.
18. Дружинин Н. К. Логика оценки статистических гипотез. М., «Статистика», 1973. 212 с.
19. Оуэн Д. Б. Сборник статистических таблиц. М., изд-во вычислительного центра АН СССР, 1966. 586 с.
20. Vainu, J., Vensel, V. Uut majanduslikus analüüsis. Tln., «Eesti Raamat», 1974. 128 lk.
21. Тинтнер Г. Введение в эконометрию. М., «Статистика», 1965. 364 с.
22. Миллс Ф. Статистические методы. М., Государственное статистическое издательство, 1958. 800 с.
23. Четыркин Е. М. Статистические методы прогнозирования. М., «Статистика», 1975. 184 с.
24. Федоренко Н. П. О методах социально-экономического прогнозирования. Методология прогнозирования экономического развития СССР. М., «Экономика», 1971, с. 9...21.
25. Ratassepp, K. Matemaatilised tabelid. Tln., «Pedagoogiline kirjandus», 1948. 32 lk.
26. Бернстейн, А. Справочник статистических решений. М., «Статистика», 1968. 152 с.

Ханс Ялясто. **Справочник по элементарной статистике.** На эстонском языке. Художник-оформитель Р. Эйлсен. Издательство «Валгус», Таллин.
Toimetaja V. Vensel. Kunstiline toimetaja O. Herodes. Tehniline toimetaja A. Muna. Korrektor E. Martoja.

ИБ № 18.

Laduda antud 18. V 1976. Trükkida antud 3. I 1978. Läti NSV Ligatne Paberivabriku trükipaber nr. 1, 70×90/32. Trükipoognaid 9,25. Tingtrükipoognaid 10,82. Arvestuspoognaid 11,96. Trükiarv 4000. MB-06901. Tellimuse nr. 2792. H. Heidemanni nim. Trükikoda, Tartu, Oli kooli 17/19. II

Hind 75 kop.